大　学　数　学

（理工类）

（第 2 版）

刘金冷　　　　主编

张艺萍　杨　凡　副主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • **BEIJING**

内 容 简 介

这是一本包括微积分、空间解析几何、常微分方程、级数、矩阵与线性方程组、拉普拉斯变换基本知识及其应用的教材，配套有单独一册作业题、自测题，并融入了部分著名数学家、学者的史话．

本书是为成人专科院校、高职院校成人专科班、普通高校成教院成人专科班理工类专业的学生而编写的．编写的原则是“服务专业，注重基础，突出应用，力求简明，与专科学生水平相适应．”本书也适用于各高职高专院校理工类学生和从事工程技术、工程管理的人员．

图书在版编目（CIP）数据

大学数学. 理工类 / 刘金冷主编. —2 版. —北京：电子工业出版社，2010.2
ISBN 978-7-121-08065-4

I. 大…　II. 刘…　III. 高等数学－高等学校：技术学校－教材　IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 211143 号

策划编辑：施玉新
责任编辑：毕军志
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：17.5　字数：448 千字
印　　次：2010 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：28.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换．若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888．

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn．

服务热线：（010）88258888．

编 委 会

第 2 版前言

本教材自 2007 年至今，已在天津市各成人高等院校大专班、普通高校成人教育学院专科班、职业院校成人专科班使用两年．经天津市教委主管部门研究决定，对教材中的不妥之处进行了修订，再版后继续供上述各类成人专科班的理工类专业数学课教学使用．参加修订工作的教师有天津海运职业学院刘金冷教授、天津市新华职工大学张艺萍副教授、天津市河东区职工大学张晔副教授、天津现代职业技术学院王玲芝副教授、天津渤海职业技术学院陶印修副教授、天津城市职业学院杨凡副教授．本书由张振国教授主审．他们根据两年的教学实践，以及各自对数学知识的研究、探讨，认真审读了教材内容，共同研究并确定了修改意见．同时，依据天津市教委职教中心对成人专科教学课的微积分内容实行全市统一考试、阅卷的要求，重新调整了相应章节的练习题、作业题、自测题，并校核了对应的参考答案．可以肯定，再版的教材、作业册将更便于广大任课教师的教学工作，也将更利于学生学好数学课，掌握必需的数学知识．

在此，也向参加教材修订征求意见会及提供教材修改意见的各位教师表示诚挚的谢意．

编者

2009 年 11 月

前　言

近些年来，成人高等教育发展迅速，取得了丰硕成果，为世人所瞩目．成人高等教育中的数学教育，在各个专业课程体系架构中，起到了十分重要的基础作用，并进一步提高学生的逻辑思维能力、分析能力．目前，成人高等教育，无论是其培养目标，还是专业设置，以及专业课程体系设计，都逐步向职业教育方向发展．这就要求数学教育和教学要适应这一新的变化，教材必须摆脱沿袭本科制教材版本模式的编写思路．当前，急需陈述简明，内容模块化，与各大类专业职业技术教育要求相适应的教材．另外，成人高等职业教育中受教育对象普遍年轻化，并且绝大多数学生已不是高中毕业生，而是中职学校毕业生，导致学生数学基础知识水平明显降低，这也是数学教材编写中必须面对的现实．教材内容还是应从实际出发，易于学生学习，易于理解和掌握，有利于在其他学科学习中运用．基于以上认识，本书的编写原则确定为“服务专业，注重基础，突出应用，力求简明，与专科学生水平相适应．”

本书是按天津市教委成人教育与培训处组织审定的《编写纲要》的要求，在中国教育应用数学学会天津分会的支持下，组织了天津市新华职工大学、天津市河东区职工大学、天津市财贸管理干部学院、天津海运职业学院、天津机电职业技术学院、天津城市职业学院、天津市教委职业与技术教育中心的部分教师进行编写的．

本书具有以下特点：

（1）按模块化结构设计本书内容，以满足不同专业对数学不同内容的需求进行教学选择．

（2）在引入重要概念、定理前，以“引例”的方式导入，并概括其应用的基本思路．

（3）以评注方式对重要概念、重要定理、常用的运算方法进行总结，以加深理解、指出应注意的要点．

（4）各章之前，融入了与教材内容相关的著名数学家、学者的史话及数学文化的内容．

（5）本书配有单独一本“作业册”，与教材同步使用，并采用撕页方式装订，更便于学生和教师使用．

第 1 和第 2 章由李广全副教授编写，第 3，4，5 章由杜瑞文教研员编写，第 6 章和第 9 章由张振国教授编写，第 7 章和第 8 章由杨凡副教授编写，张振国教授和刘金冷教授统审全书．

由于编者水平有限，加之时间紧迫，书中可能有不妥之处，恳请使用本书的广大师生指正．

编者

2006 年 11 月

目　　录

数学史话 1

什么是数学?

公元前 4 世纪的希腊哲学家亚里士多德将数学定义为“**数学是量的科学**”.

19 世纪恩格斯论述数学本质时说“纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系”.根据恩格斯的论述，数学可以定义为“**数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学**”.

20 世纪 50 年代，前苏联一批有影响的数学家试图修正前面的恩格斯的定义来概括现代数学的发展特征：“**现代数学就是各种量之间的可能的，一般说各种变化着的量的关系和相互联系的数学**”.

20 世纪 80 年代，一批美国学者，将数学简单地定义为关于“模式”的科学：“**[数学]这个领域已被称做模式的科学，其目的是要揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性**”.

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

数学的特征是什么?

第一是它的抽象性，第二是精确性，或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结构的确定性，最后是它的应用的极端广泛.

摘自《数学——它的内容、方法和意义》A．Д．亚历山大洛夫等

数学与社会进步

数学从萌芽之日起，就表现出解决因人类实际需要而提出的各种问题的功效．商业、航海、历法计算，桥梁、寺庙、宫殿的建造，武器与工事的设计等，数学往往能对所有这些问题作出令人满意的解决．数学在现代社会生活中的直接应用更是大量的和经常的．数学对人类物质文明的影响，最突出的是反映在它与能从根本上改变人类物质生活方式的产业革命的关系上．人类历史上先后共有三次重大的产业革命，这三次产业革命的主体技术都与数学的新理论、新方法的应用有直接或间接的关系．

数学对于人类精神文明的影响同样也很深刻．数学本身就是一种精神，一种探索精神，这种精神的两个要素，即对理性（真理）与完美的追求，千百年来对人们的思维方式、教育方式以及世界观、艺术观等的影响是不容否定的．数学对人类精神文明的意义，也突出地反映在它与历次重大思想革命的关系上．由于其不可抗拒的逻辑说服力和无可争辩的计算精确性，数学往往成为解放思想的决定武器．

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

函数概念的起源

在自然界中各种物体和各种现象是有机的、相互关联的、彼此依赖的、稳固不变的最简单关系，很早就有人加以研究了．关于这种关系的知识逐渐积累起来，形成为物理的定律．在多数的场合，这指出了在数量上描述某些现象的几个不同的量是紧密地相互关联的，一个量完全决定于其他的量．例如，矩形的两边的长短就使它的面积完全确定，已给的气体的体积在温度固定时决定于它的压力，已给的金属杆的伸长度决定于它的温度，等等．类似的规律性就正是函数概念的起源．

摘自《数学——它的内容、方法和意义》［苏］A．Д．亚历山大洛夫等

函数概念的深化

18 世纪微积分发展的一个历史性转折，是将函数放到了中心的地位，而以往数学家们都以曲线作为微积分的主要对象．这一转折首先也应归功于欧拉，欧拉在《无限小分析论》中明确宣布："数学分析是关于函数的科学"，微积分被看做是建立在微分基础上的函数理论．

函数概念在 17 世纪已经引入，牛顿《原理》中提出的"生成量"就是雏形的函数概念．莱布尼茨首先使用了"函数"（function）这一术语．他把函数看做是"像曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长度、垂线长度等所有与曲线上的点有关的量"．最先将函数概念公式化的是约翰·伯努利．欧拉则将伯努利的思想进一步解析化，他在《无限小分析论》中将函数定义为：

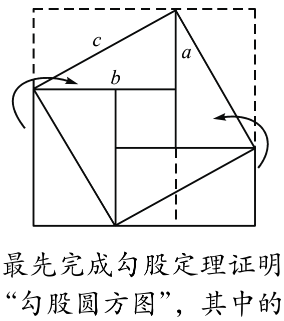
"变量的函数是一个由该变量与一些常数以任何方式组成的解析表达式．"

欧拉的函数定义在 18 世纪后期占据了统治地位．在这一定义的基础上，函数概念本身大大丰富了．

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

《周髀算经》

在现在的中国古代数学著作中，《周髀算经》是最早的一部．



《周髀算经》作者不详，成书年代据考应不晚于公元前 2 世纪西汉时期，但书中涉及的数学、天文知识，有的可以追溯到西周（公元前 11 世纪—前 8 世纪）．这部著作实际是从数学上讨论"盖天说"宇宙模型，反映了中国古代数学与天文学的密切联系．从数学上看《周髀算经》主要的成就是分数运算、勾股定理及其在天文测量中的应用，其中勾股定理的论述最为突出．

《周髀算经》主要是以文字形式叙述了勾股算法．中国数学史上最先完成勾股定理证明的数学家，是公元 3 世纪三国时期的赵爽．赵爽注《周髀算经》，作"勾股圆方图"，其中的"弦图"，相当于运用面积的出入相补证明了勾股定理．如图，考虑以一直角三角形的勾和股为边的两个正方形的合并图形，其面积应为 a^2+b^2．如果将这合并图形所含的两个三角形移补到图中所示的位置，将得到一个以三角形之弦为边的正方形，其面积应为 c^2，因此 $a^2+b^2=c^2$．

赵爽在"勾股圆方图"说中还类似地证明了勾股定理的许多推论，此外他还给出了一张"日高图"，是用面积出入相补的方法去证明《周髀算经》中的日高公式．

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

第 1 章　函数、极限与连续

本章内容是在中学数学知识的基础上，对函数的概念及性质做进一步阐述，并介绍几类基本初等函数及初等函数的概念与性质，研究函数的极限及函数的连续性．这些内容都是学习大学数学课程的重要基础，所涉及的数学思想方法具有重要的启迪和导引作用．

1.1　函数

1.1.1　函数的概念与分类

1．函数的概念

引例　圆的周长 s 与半径 r 之间的关系由 $s=2\pi r$ 表示，这里 s 与 r 是两个相互依存（依赖）的变量．

在本市内投寄信件，每封信件不超过 20g 时，应付邮费 0.60 元；超过 20g 而不超过 40g 时，应付邮费 1.20 元；以此类推，对质量不超过 60g 的信件，邮费 y（单位：元）与每封信件的质量 x（单位：g）之间的关系可用式子

$$y=\begin{cases}0.60, & 0<x\leqslant 20\ ;\\ 1.20, & 20<x\leqslant 40;\\ 1.80, & 40<x\leqslant 60\end{cases}$$

表示．这里的 x 与 y 也是两个相互依赖的变量．

在某种现象的发生过程中，通常总能找到两个或两个以上相互依赖同时又相互制约的变量，这些变量的变化遵循着某种规律，使得变量间形成某种对应关系．

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集．若对任意的 $x\in D$，变量 y 按照一定的规则总有确定的数值与之对应，则**变量 y 称为变量 x 的函数**，记做 $y=f(x)$．其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，f 表示 x 与 y 之间的**对应规则**（也叫**函数关系**）．数集 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域．

当 $x=x_0$ 时，与之对应的值 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记做

$$y_0=f(x_0) \text{ 或 } y_0=y|_{x=x_0}$$

当 x 取遍 D 内所有数值时，与之对应的 y 值的集合称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记做 M，即 $M=\{y|\,y=f(x),\ x\in D\}$．

在本章研究的函数中，只含有一个自变量，这类函数称为**一元函数**．

例 1　设函数 $f(x)=2x-3$，求 $f(a^2)$，$f(f(a))$，$(f(a))^2$．

解　$f(a^2)=2a^2-3$

$f(f(a))=f(2a-3)=2(2a-3)-3=4a-9$

$(f(a))^2=(2a-3)^2=4a^2-12a+9$

由函数的定义可知，函数的定义域就是自变量 x 的取值范围．如果函数关系用表达式 $f(x)$ 表示，那么函数的定义域是使表达式 $f(x)$ 有意义的 x 值的集合．涉及实际问题的函数的定义域还应该考虑到问题的实际意义．

例 2 求函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\lg\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域．

解 要使函数有意义，自变量 x 必须同时满足以下条件

$$\begin{cases} 4-x^2 \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{x-1}>0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 2 \\ x>1 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

解不等式组得 $1<x\leqslant 2$，所以函数的定义域为（1，2]．

2．函数的表示方法

函数的对应规则是连接变量 x 与变量 y 的纽带，由于对应规则不同，函数有着不同的表示方法．

当对应规则用表格给出时，函数表示方法称为表格法；当对应规则用图形给出时，函数表示方法称为图像法；当对应规则用解析式给出时，函数表示方法称为解析法．

当我们用解析法表示函数时，经常会遇到下面的几种情况：

（1）对于任意的 $x\in D$，因变量 y 恒为一常数．这种函数称为**常数函数**，记做 $y=c$（c 为任意常数），如 $y=-2$．

（2）当函数 y 由含有自变量 x 的一个解析式表达时，这种函数称为**显函数**，记做 $y=f(x)$．例如，$y=2x^2+1$，$y=\sin x$．

（3）当函数的对应规则由方程 $F(x，y)=0$ 所确定时，这种函数称为**隐函数**．例如，$\mathrm{e}^{xy}-y=0$，$2xy=\ln y$．

（4）当自变量 x 在定义域 D 的不同范围内取值时，因变量 y 因与之对应的规则不同而不同，此时函数的对应规则由几个不同的解析式来表达，这种函数称为**分段表示的函数**．例如，

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0; \\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ x^2, & x>1. \end{cases}$$

注意

分段表示的函数是一个函数，上述函数不能说成“是三个函数”，分段表示的函数的定义域为各段自变量取值集合的并集．

（5）当 x 与 y 需通过第三个变量来建立对应规则时，一般用参数方程来表示函数关系，这种函数称为**参数式函数**，其中第三个变量称为参变量．例如，$\begin{cases} x=t; \\ y=t^2+1. \end{cases}$

3．函数的两个要素

定义域和对应规则称为函数的两个要素．如果两个函数的定义域相同，且对应规则相同，那么这两个函数为同一个函数．

例 3　判定函数 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 是否为同一个函数．

解　因为函数 $f(x)$ 的定义域是（$-\infty$，0）$\cup$（0，$+\infty$），函数 $g(x)$ 的定义域是（0，$+\infty$），所以 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 不是同一个函数．

如果将 $f(x)$ 的定义域限制在（0，$+\infty$）内，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就是同一个函数．

1.1.2　函数的几种特性

1．有界性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为数集 D，如果存在实数 $M>0$，对于任意的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，此时函数图像夹在直线 $y=\pm M$ 之间，则 $y=f(x)$ 称为在数集 D 上的**有界函数**；如果这样的 M 不存在，则 $y=f(x)$ 称为在数集 D 上的**无界函数**．

注意

函数 $y=f(x)$ 是否有界与函数的定义域有关．例如，$y=x^2$ 在数集（0，1）内为有界函数，而在（0，$+\infty$）内是无界函数．因此，在讨论函数的有界性时，必须指明讨论的范围．

2．单调性

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，对于 I 内任意的 $x_1<x_2$，

（1）如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么称函数 $y=f(x)$ 在 I 上是单调增加函数，区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的**单调增加区间**．单调增加函数的图像随自变量在 I 内的增大而自左向右上升，即自变量越大，对应的函数值越大．

（2）如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么称 $y=f(x)$ 在 I 上是单调减少函数，区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的**单调减少区间**．单调减少函数的图像随自变量在 I 内的增大而自左向右下降，即自变量越大，对应的函数值越小．

在区间 I 上的单调增加函数与单调减少函数统称为区间 I 上的**单调函数**．

注意

函数 $y=f(x)$ 的单调性与区间有关．例如，函数 $y=x^2$ 在区间（$-\infty$，0）上是单调减少函数，在区间（0，$+\infty$）上是单调增加函数，在（$-\infty$，$+\infty$）上不是单调函数．因此，指出函数的单调性时必须要指明单调区间．

3．奇偶性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即对于任意的 $x\in D$，必有 $-x\in D$．

（1）如果恒有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 称为**偶函数**，其图像关于 y 轴对称．

（2）如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 称为**奇函数**，其图像关于原点对称．

例 4 讨论下列函数的奇偶性.

（1） $f(x)=\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{2}$；（2） $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$；（3） $f(x)=\sin x+\cos x$.

解 （1）因为函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{x}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{2}$ 为偶函数.

（2）因为函数的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），且 $f(-x)=\ln\left[-x+\sqrt{1+(-x)^{2}}\right]=\ln(-x+\sqrt{1+x^{2}})$

$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^{2}})(x+\sqrt{1+x^{2}})}{x+\sqrt{1+x^{2}}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})=-f(x)$$

所以， $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$ 为奇函数.

（3）因为函数的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），且 $f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$，它既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，所以， $f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是偶函数，也不是奇函数.

4．周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $T>0$，使得对于任意的 $x\in D$，恒有 $x\pm T\in D$，并且满足 $f(x+T)=f(x)$，那么函数 $y=f(x)$ 称为以 T 为周期的**周期函数**. 显然，若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 kT 也是 $f(x)$ 的周期（$k\in\mathbf{Z}$）. 通常所说的周期都是指函数的最小正周期.

例 5 求函数 $f(x)=\sin 2x$ 的周期.

解 设所求周期为 T，则必有 $f(x+T)=f(x)$，即

$$\sin 2(x+T)=\sin(2x+2T)=\sin 2x$$

因为正弦 $\sin x$ 的周期为 2π，所以应有 $2T=2\pi$． 故 $T=\pi$.

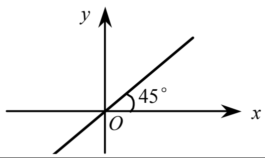
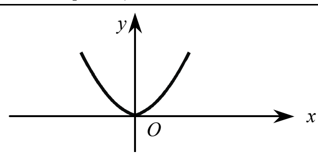
一般地，函数 $\sin\omega x$ 与 $\cos\omega x$ 的周期可由公式 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 求得. 以 T 为周期的周期函数，在每个长度为 T 的区间［kT，$(k+1)T$］上的图像有相同的形状.

1.1.3 基本初等函数、反函数

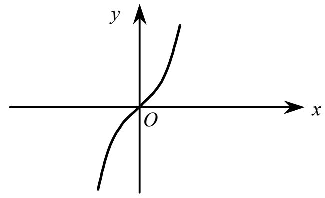
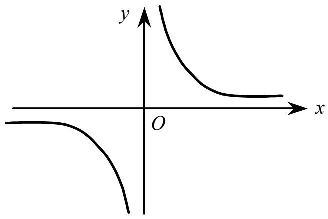
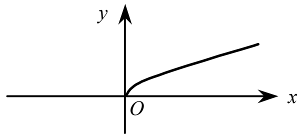
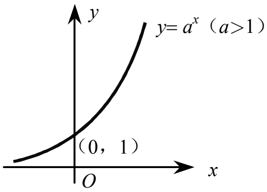
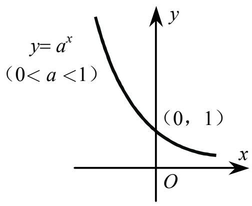
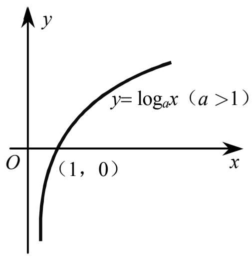
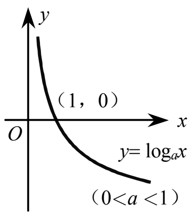
定义 1.5 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

高中阶段的数学教材中，对幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及其性质与图像均已作过介绍. 其主要内容如表 1-1 所示.

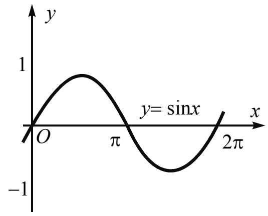
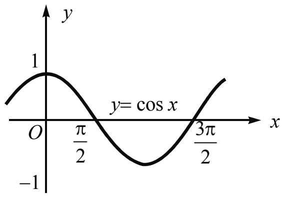
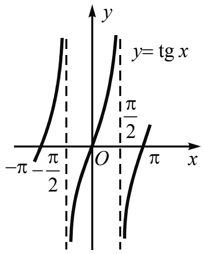
表 1-1

函　数		定义域	图　像	特　性
幂函数	$y=x$	（$-\infty$，$+\infty$）		奇函数 增函数
	$y=x^{2}$	（$-\infty$，$+\infty$）		偶函数 （$-\infty$，0）内减函数； （0，$+\infty$）内增函数

续表

函　数		定义域	图　像	特　性
幂函数	$y=x^3$	$(-\infty,\ +\infty)$		奇函数 增函数
	$y=x^{-1}$	$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$		奇函数 $(-\infty,\ 0)$内减函数； $(0,\ +\infty)$内减函数
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$[0,\ +\infty)$		增函数
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$(-\infty,\ +\infty)$		增函数
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$(-\infty,\ +\infty)$		减函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$(0,\ +\infty)$		增函数
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$(0,\ +\infty)$		减函数

续表

<table>
<tr><th></th><th>函　数</th><th>定义域</th><th>图　像</th><th>特　性</th></tr>
<tr><td rowspan="3">三角函数</td><td>$y=\sin x$</td><td>$(-\infty，+\infty)$</td><td></td><td>奇函数
周期函数（周期为 2π）
在（$2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$2k\pi+\frac{\pi}{2}$）内为增函数，在（$2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$2k\pi+\frac{3\pi}{2}$）内为减函数</td></tr>
<tr><td>$y=\cos x$</td><td>$(-\infty，+\infty)$</td><td></td><td>偶函数
周期函数（周期为 2π）
在（$2k\pi$，$2k\pi+\pi$）内为减函数，在（$2k\pi+\pi$，$2k\pi+2\pi$）内为增函数</td></tr>
<tr><td>$y=\tan x$</td><td>$\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}，\ k\in\mathbf{Z}\}$</td><td></td><td>奇函数
周期函数（周期为 π）
在（$k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\pi+\frac{\pi}{2}$）内为增函数</td></tr>
</table>

定义 1.6　设 $y=f(x)$ 定义域为 D，值域为 M．如果对于 M 中的每一个 y 值，在 D 中有确定的 x 值与之对应，则 x 是定义在 M 上的以 y 为自变量的函数，称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记做　$x=f^{-1}(y)$，$y\in M$．

习惯上，总用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此，通常将 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$．

由于不同角的同名三角函数值有可能相等，所以三角函数在其定义域内不存在反函数．要保证三角函数存在反函数，就需要改变三角函数的定义域．所以将反三角函数定义如下：

正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$ 上的反函数称为**反正弦函数**，记做 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1，1]$，值域为 $[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0，\pi]$ 上的反函数称为**反余弦函数**，记做 $y=\arccos x$，其定义域为 $[-1，1]$，值域为 $[0，\pi]$.

$y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$ 上的反函数称为**反正切函数**，记做 $y=\arctan x$，其定义域为 $(-\infty，+\infty)$，值域为 $(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$.

由于互为反函数的两个函数图像关于直线 $y=x$ 对称，因此可以利用三角函数的图形得到反三角函数的图像，如图 1-1、图 1-2、图 1-3 所示．观察图像容易得到反三角函数的性质．

（1）图 1-1 是利用正弦函数 $y=\sin x$ （$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$）得到的反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的图像，观察图像可以得到反正弦函数的性质：

① 定义域为［−1，1］；

② 在［−1，1］上是增函数；

③ 反正弦函数为奇函数，即 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$；

④ 反正弦函数在［−1，1］上有界，即 $|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

（2）图 1-2 是利用余弦函数 $y=\cos x$（$0\leqslant x\leqslant\pi$）得到的反余弦函数 $y=\arccos x$ 的图像，观察图像可以得到反余弦函数的性质：

① 定义域为［−1，1］；

② 在［−1，1］上是减函数；

③ 反余弦函数为非奇非偶函数；

④ 反余弦函数在［−1，1］上有界，即 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$.

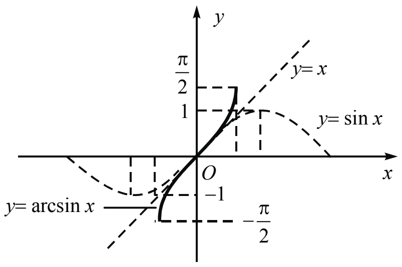


图 1-1

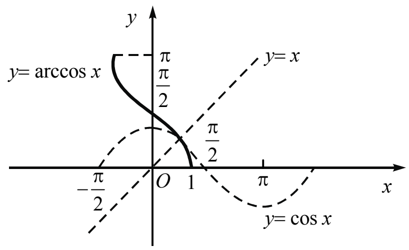


图 1-2

（3）图 1-3 是利用正切函数 $y=\tan x$ （$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$）得到的反正切函数 $y=\arctan x$ 的图像，观察图像可以得到反正切函数的性质：

① 定义域为（−∞，+∞）；

② 在（−∞，+∞）内是增函数；

③ 反正切函数为奇函数，即 $\arctan(-x)=-\arctan x$；

④ 反正切函数在（−∞，+∞）上有界，即 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$.

例 6　求下列各反三角函数的值.

（1）$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；　（2）$\arccos(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$；

（3）$\arctan 1$.

解　（1）因为在［$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$］上，$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$；

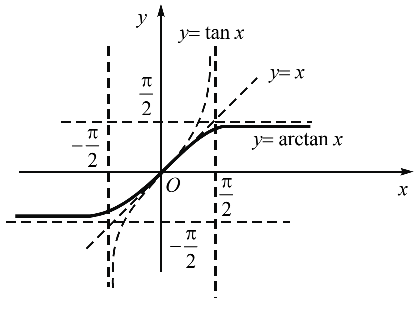


图 1-3

（2）因为在［0，π］上，$\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{5\pi}{6}$；

（3）因为在（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）上，$\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

1.1.4 复合函数

观察函数 $y=\ln x^2$，显然它不是基本初等函数，但是，它是由基本初等函数 $y=\ln u$ 和 $u=x^2$ 通过中间变量 u，使得 y 成为 x 的函数．函数 $y=\ln x^2$ 称为复合函数．

定义 1.7 设函数 $y=f(u)$ 是 u 的函数，$u=g(x)$ 是 x 的函数，如果由 x 所确定的 u 使得 y 有意义，则把 $y=f$［$g(x)$］称为 x 的**复合函数**．其中 x 称为**自变量**，u 称为**中间变量**，f 称为**外层函数**，g 称为**内层函数**．

由定义不难得知：

（1）函数的复合是有条件的．

例如，设函数 $y=\arccos u$，$u=2+x^2$，因为对于内层函数 $u=2+x^2$ 的定义域（$-\infty$，$+\infty$）中的任何 x 值，对应的 u 值都不小于 2，从而使得外层函数 $y=\arccos u$ 无意义，因此，形式上的复合函数 $y=\arccos(2+x^2)$ 是没有意义的．

事实上，两个函数可以进行复合的条件是：内层函数的值域与外层函数的定义域的交集必须是非空集合．

（2）内层函数的定义域与复合函数的定义域不一定是相同的．

例如，函数 $y=\sqrt{1-x}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x$ 组成的复合函数．复合函数的定义域为（$-\infty$，1]，内层函数的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）．

（3）函数的复合可以是多重复合．

例 7 设函数 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=2x$，试将 y 写成 x 的函数．

解 $y=\cos^2 v=\cos^2(2x)$，

此函数由三层函数复合而成．

最外层：$y=u^2$——幂函数；

中层：　$u=\cos v$——三角函数；

最内层：$v=2x$——幂函数与常数的乘法运算．

由上例可见，一个比较复杂的函数，可以看做是由几个简单函数复合而成的．这里所说的简单函数一般是指由基本初等函数或基本初等函数经过四则运算所构成的函数．

正确地分析函数的复合过程十分重要，必须要分清层次，掌握要领：“由外向内，逐层复合”．

例 8 指出下列函数的复合过程：

（1）$y=\sqrt{5+2x}$；（2）$y=\mathrm{e}^{-x^2-1}$；（3）$y=\lg\sin^2 x$．

解 （1）函数 $y=\sqrt{5+2x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=5+2x$ 复合而成的．

（2）函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2-1}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=-x^2-1$ 复合而成的．

（3）函数 $y=\lg\sin^2 x$ 是由 $y=\lg u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成的．

初学者往往对分析函数的复合过程感到困难，不妨考虑下面的思路．

设复合函数 $y=f\{\varphi[g(x)]\}$，对于给定的 x 值，计算函数值的顺序（以由三层函数所复合函数为例）是：（1）先计算最内层函数值 $g(x)=v$；（2）再计算中层函数值 $\varphi(v)=u$；（3）最后计算最外层函数值 $f(u)=y$．即“由内向外”逐层计算，并且每一层都是计算一个简单函数的值．不难看出，函数的复合顺序恰好与计算函数值的顺序相反．

1.1.5　初等函数

1．初等函数的定义

定义 1.8　由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成，并且用一个式子来表示的函数称为**初等函数**．

由于在生产、生活中所遇到的函数大部分是初等函数，本课程主要研究初等函数．

2．建立函数关系举例

利用数学方法解决实际问题时，通常需要找出该问题中存在的若干变量，科学准确地分析它们之间的相互关系，并根据实际需要，将这种关系用函数表示出来．

例 9　已知某物体与地面的摩擦系数为 μ，其质量为 P，设有一个与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体从静止开始移动，如图 1-4 所示．求物体开始移动时，拉力 F 与角 α 之间的函数关系．

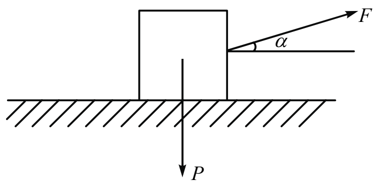


图 1-4

解　此物体对地面的压力为 $P-F\sin\alpha$，摩擦力为 $(P-F\sin\alpha)\mu$，水平方向的拉力为 $F\cos\alpha$，当物体开始移动时，水平拉力与阻力相等，因此有 $F\cos\alpha=(P-F\sin\alpha)\mu$，所以，$F=\dfrac{P\mu}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$．

例 10　从甲地到乙地的火车票的全价为 q_0（元）．铁路部门的规定：1.1m 以下的儿童免票；身高超过 1.1m 但不足 1.4m 的儿童购买半价票；身高达到或超过 1.4m 者购买全票．试写出从甲地到乙地的票价 q（元）作为身高 s（m）的函数表达式．

解　依题意，票价 q（元）与身高 s（m）的函数关系可表示为

$$q=\begin{cases}0, & 0<s\leqslant 1.1;\\ \dfrac{1}{2}q_0, & 1.1<s<1.4;\\ q_0, & s\geqslant 1.4.\end{cases}$$

练习 1.1

1．求下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{x^2-4x+3}$；　　（2）$y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$；

（3）$y=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2};\\ x, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi.\end{cases}$

2．判断下列各题中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数.

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；　　（2）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；　　（4）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

3．求函数值.

（1）$f(x)=\sqrt{3+x^2}$，求 $f(2)$，$f(0)$，$f(x_0)$，$f(\dfrac{1}{a})$；

（2）$f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0;\\ 2, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(\dfrac{1}{2})$.

4．判断函数的奇偶性.

（1）$y=x^3\sin x$；　　（2）$y=x(x-1)(x+1)$.

5．求下列周期函数的周期.

（1）$y=\cos\dfrac{x}{2}$；　（2）$y=\sin 2x$；　（3）$y=\sin^2 x$；　（4）$y=\tan(x+\dfrac{\pi}{4})$.

6．求出下列函数的反函数.

（1）$y=2x-4$，$x\in(-\infty,+\infty)$；（2）$y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$；（3）$y=2^x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

7．写出下列函数的复合过程.

（1）$y=\mathrm{e}^{1-x^2}$；　（2）$y=\ln(3-x)$；　（3）$y=5(x+2)^2$；　（4）$y=\sin^3(8x+5)$.

8．要建造一个容积为 V 的长方体水池，它的底面为正方形．如果水池底面的单位面积造价为侧面的 3 倍，试建立总造价与底面的边长之间的函数关系.

9．已知甲乙两地间铁路行李单程运费的计费标准：当行李质量不超过 50kg 时，按基本运费 0.30 元/千克收费；当超过 50kg 时，超过的部分按 0.45 元/千克收费．求行李费 y（元）与行李质量 x（kg）之间的函数关系.

1.2 极限的概念

1.2.1 数列$\{x_n\}$的极限

1．数列的概念

早在公元前 3 世纪，我国的庄子就有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的名言，这反

映了我国古代劳动人民在长期的生产和生活实践中所产生的朴素的极限思想.

定义 1.9　按一定顺序排列的一列数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为数列，记做$\{x_n\}$．其中，x_i（$i=1$，2，…，n，…）称为数列的第 i 项．如果数列的项数 n 与数列的各项x_i（$i=1$，2，…，n，…）之间都是按照某种相同的规则对应的，并且这种对应规则可以用一个解析式表达，那么这个解析式称为数列的通项公式，记做$x_n=f(n)$（$n\in\mathbf{N}^*$）．由于项数 n 的取值特点，数列$\{x_n\}$也是函数．该函数的图像由平面上无穷多个孤立点组成.

2．数列的极限

例 1　观察下面的数列，当$n\to\infty$（即 n 无限增大）时，x_n 的变化趋势.

（1）$x_n=\dfrac{n}{n+1}$；（2）$x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

解　（1）数列$\{x_n\}$：$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{4}{5}$，…，$\dfrac{n}{n+1}$，…

函数的图像如图 1-5 所示，当$n\to\infty$时，x_n 无限趋近于数值 1.

（2）数列$\{x_n\}$：1，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{1}{4}$，…，$\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$，…．函数的图像如图 1-6 所示，当$n\to\infty$时，x_n 无限趋近于数值 0.

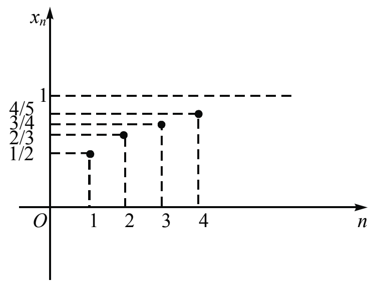


图 1-5

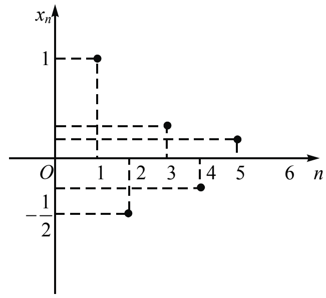


图 1-6

定义 1.10　设数列$\{x_n\}$，如果当$n\to\infty$时，x_n 无限趋近于一个确定的常数 a，则把 a 称为当 n 趋近于无穷大时，数列$\{x_n\}$的**极限**，记做$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$或$x_n\to a\ (n\to\infty)$.

由定义可知，例 1 中的两个数列都有极限，分别记做：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=0$.

由图 1-5、图 1-6 可见，如果数列有极限，那么，数列的各项在平面上的对应点将随着项数 n 的增大无限趋近于一个确定的常数.

例 2　写出下面各数列的极限.

（1）$x_n=2$；（2）$x_n=(-1)^n$；（3）$x_n=n$.

解　（1）数列$\{x_n\}$：2，2，2，…，如图 1-7 所示，可知$\lim\limits_{n\to\infty}2=2$.

各项均为同一常数的数列称为常数列．常数列的极限仍为常数本身，即$\lim\limits_{n\to\infty}c=c$（$c$ 为

常数）.

（2）数列$\{x_n\}$：−1，1，−1，1，…，如图 1-8 所示，可知当$n\to\infty$时，x_n总是在−1 与 1 之间跳跃，而不能无限趋近于一个确定的常数，该数列的极限不存在.

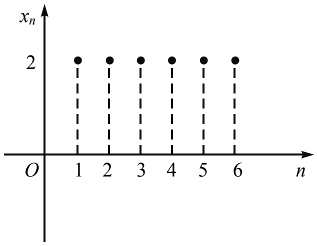


图 1-7

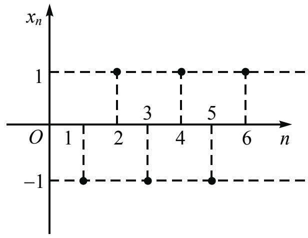


图 1-8

（3）数列$\{x_n\}$：1，2，3，…，如图 1-9 所示，当$n\to\infty$时，$x_n\to\infty$，不符合数列极限的定义，因此该数列的极限不存在.

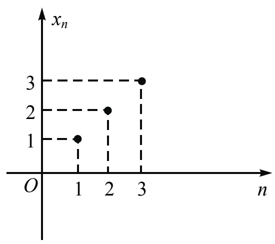


图 1-9

1.2.2 函数 $y=f(x)$的极限

1．$x\to\infty$时，$y=f(x)$ 的极限

例 3 观察当$x\to\infty$时，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的变化趋势.

解 $f(x)$的定义域为（−∞，0）∪（0，+∞），如图 1-10 所示，当$x\to+\infty$时，曲线无限趋近于x轴，曲线上各点处的函数值无限趋近于 0，即$\dfrac{1}{x}\to 0$.

当$x\to-\infty$时，曲线无限趋近于x轴，曲线上各点处的函数值无限趋近于 0，即$\dfrac{1}{x}\to 0$.

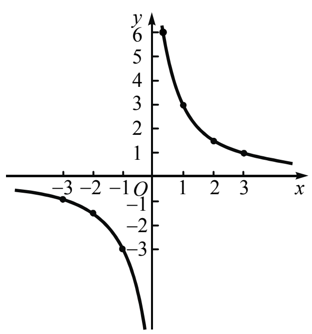


图 1-10

定义 1.11　设函数 $y=f(x)$ 对于任意大的 $|x|$ 有意义，当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，$f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的**极限**. 记做 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（$x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$）.

将 $|x|\to+\infty$ 记做 $x\to\infty$，则

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A .$$

由定义 1.11 可知，上例中的函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限存在，即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 .$$

一般地，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^a}=0$（$a$ 为任意正实数）.

例 4　用观察图像的方法，写出下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限.

（1）$f(x)=\arctan x$；（2）$f(x)=2^x$；（3）$f(x)=\sin x$.

解　（1）函数 $f(x)=\arctan x$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），其图像如图 1-11 所示.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$.

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

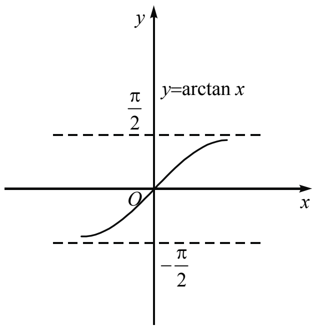


图 1-11

（2）函数 $f(x)=2^x$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），其图像如图 1-12 所示，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$，而当 $x\to+\infty$ 时，2^x 的值无限增大，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x$ 不存在. 为了研究方便，一般可以记做 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$.

（3）函数 $f(x)=\sin x$ 的定义域为($-\infty$,$+\infty$)，其图像如图 1-13 所示，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，对应的函数值 $\sin x$ 在 $[-1，1]$ 内波动，而不能无限趋近于一个确定的常数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

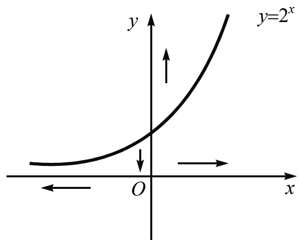


图 1-12

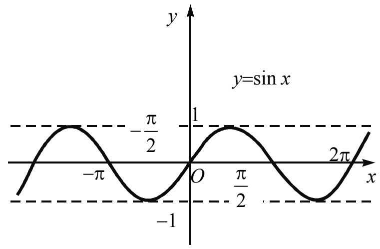


图 1-13

2．当 $x \to x_0$ 时，$y = f(x)$ 的极限

为了便于研究函数在点 x_0 附近的变化，常用邻域的概念．设 $\delta > 0$，把开区间（$x_0 - \delta$，$x_0 + \delta$）称为点 x_0 的 δ **邻域**，点 x_0 为邻域的中心，δ 为邻域的半径．

例 5　观察函数 $y = x^2$ 当 $x \to 1$ 时的变化趋势．

解　函数在 1 的邻域内有意义，如图 1-14 所示，当自变量 x 无限趋近于 1 时，对应的曲线上的点无限趋近点（1，1），即函数值无限趋近于 1．

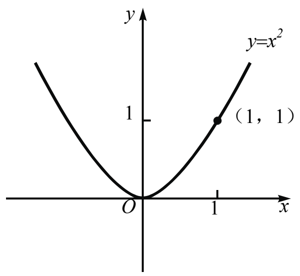


图 1-14

由上例可见，符号 $x \to x_0$ 包含两个方面：

（1）x 从 x_0 的左侧趋近 x_0，记做 $x \to x_0^-$；

（2）x 从 x_0 的右侧趋近 x_0，记做 $x \to x_0^+$．

定义 1.12　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义（在点 x_0 可以没有定义），当 $x \to x_0$（但 $x \neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则 A 称为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**极限**．记做 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$．

同样，当 x 从 x_0 的左侧（右侧）无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则 A 称为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 的左（右）极限．记做

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \ \left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \right) \text{或} f(x_0 - 0) = A \ \left(f(x_0 + 0) = A \right).$$

显然，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$．

由定义 1.12 可知，例 5 中的函数的左、右极限都存在且相等，即 $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$，所以，$\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$．

一般地，对于幂函数 $y = x^\alpha$，总有 $\lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$（当 $\alpha \neq 0$ 时，$x_0 \neq 0$）．

例 6　用观察图像的方法，写出下列函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$；（2）$f(x)=\begin{cases} x, & x<-1; \\ x^2, & -1\leqslant x<1; \\ 1, & x\geqslant 1. \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解　（1）函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义．图像如图 1-15 所示．因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$ 且 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$，所以，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

本例说明，函数在点 x_0 处是否有定义与该点处的极限是否存在无关.

（2）函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x<-1; \\ x^2, & -1\leqslant x<1; \\ 1, & x\geqslant 1 \end{cases}$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），$x=\pm 1$ 是各段定义域的分界点．如图 1-16 所示，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1$，所以，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

又因为 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}x=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}x^2=(-1)^2=1$，

即 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ 不存在.

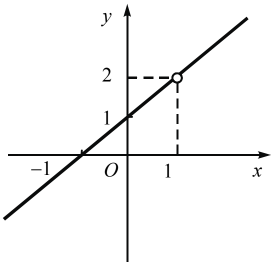


图 1-15

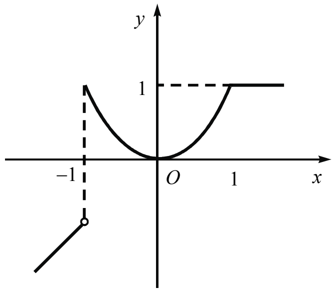


图 1-16

1.2.3　无穷小与无穷大

1．无穷小的定义

定义 1.13　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则函数 $f(x)$ 称为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小量**，简称**无穷小**.

注意

无穷小不是一个很小的数，它是在自变量的某一变化过程中一个以零为极限的变量.

观察函数 $y=x^2$，因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以 x^2 是当 $x\to 0$ 时的无穷小．因为 $\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$，所以当 $x\to 1$ 时 x^2 不是无穷小.

由此可见，一个函数是否为无穷小量，还取决于它的自变量的变化趋势．因此，说某一变量是无穷小量，必须指明自变量的变化趋势．

2．无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和为无穷小．

性质 2 有限个无穷小的乘积为无穷小．

性质 3 有界函数与无穷小的乘积为无穷小．

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$．

解 当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小，而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数．所以，由性质 3 可知，$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$．

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，那么 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-A)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-A=0$．即当 $x\to a$ 时 $f(x)-A$ 是无穷小，于是得到

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$$

其中 α 为 $x\to a$ 时的无穷小．

3．无穷小的比较

当 $x\to 0$ 时，函数 x、x^2、x^3 均为无穷小，由表 1-2 可以看出，它们与 0 的距离是不同的，乘方的次数越高，与 0 的距离越近．

表 1-2

x	1	0.1	0.01	0.001
x^2	1	0.01	0.0001	0.000 001
x^3	1	0.001	0.000 001	0.000 000 001

为了反映出在自变量的同一变化过程中，无穷小与零的差距，我们引入无穷小的比较．

定义 1.14 设 α 和 β 是同一变化过程中的无穷小，即 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$．则

（1）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则 β 称为比 α **较高阶的无穷小**，记做 $\beta=o(\alpha)$；

（2）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则 β 称为比 α **较低阶的无穷小**；

（3）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c$（$c$ 为非零常数），则 β 称为与 α **同阶的无穷小**．

特别地，当 c=1 时，即 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$ 时，β 称为与 α 等价的无穷小，记做“$\alpha\sim\beta$”，读做“α 等价于 β”．

例 8 比较下列各组无穷小．

（1）当 $x\to 1$ 时，比较 $x-1$ 与 x^2-1；

（2）当 $x\to 0$ 时，比较 x^2 与 $\dfrac{x^2}{1-x}$．

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to 1$ 时，$x-1$ 与 x^2-1 是同阶的无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\dfrac{x^2}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1$，所以当 $x\to 0$ 时，x^2 与 $\dfrac{x^2}{1-x}$ 是等价无穷小．即当 $x\to 0$ 时，$x^2\sim\dfrac{x^2}{1-x}$.

可以证明，当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$e^x-1\sim x$.

设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\alpha'}$$

上式说明，在求函数极限的过程中，我们可以利用等价无穷小的关系，对函数进行替换，以达到化简函数、便于运算的目的．要注意，一般情况下，无穷小的替换只适用于函数为乘积的形式.

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解　因为当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

例 10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　因为 $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$，又当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

4．无穷大

定义 1.15　若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，即 $|f(x)|\to\infty$，则函数 $f(x)$ 称为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大量**，简称**无穷大**.

由定义可知，无穷大不是一个很大的数，它是绝对值无限增大的变量.

例 11　求当 $x\to 0$，$x\to\infty$，$x\to 2$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的极限.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$.

由上例可见，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷大量；当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量；当 $x\to 2$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 既不是无穷小量，也不是无穷大量.

在自变量的不同的变化趋势中，同一个函数可能是无穷大，也可能是无穷小，还可能既不是无穷大，也不是无穷小．因此，一个函数是否为无穷大，与它的自变量的变化趋势是有

关系的.

定理 1.1 在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小并且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大（证明略）.

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$，故不能应用法则 3，但因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x}=0$，由定理 1.1 可知

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{1-x}{x}}=\infty$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)$.

解 当 $x\to\infty$ 时，$x^2\to\infty$，极限呈现“$\infty-\infty$”的形式，这也是一种“未定式”的极限，故不能应用法则 1．但是，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}=0$，

所以，由定理 1.1 可知 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2-x}}=\infty$.

练习 1.2

1．观察下面各数列的变化趋势，如果有极限，写出极限.

（1）$x_n=1-(-\dfrac{2}{3})^n$；（2）$x_n=\dfrac{2n+1}{n}$；

（3）$x_n=(-1)^n n$；（4）$x_n=3-\dfrac{1}{n}$.

2．观察下面各函数的变化趋势，如果有极限，写出极限.

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} c$（c 为常数）；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$；（3）$\lim\limits_{x\to 1}x^3$；

（4）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{1}{2})^x$；（5）$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}\cos x$.

3．作函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的图形，并求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<0;\\ 2e^x, & 0\leqslant x<1;\\ 4, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，并回答 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在，若存在，写出极限值.

5．当 $x\to 0$ 时，下列函数哪些是无穷小？哪些是无穷大？哪些既不是无穷小也不是无穷

大？

（1）$y=\dfrac{x+1}{x}$；　　　　（2）$y=\dfrac{x}{x+1}$；

（3）$y=\dfrac{1}{x}\sin x$；　　　　（4）$y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

6．函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在什么条件下是无穷小？在什么条件下是无穷大？

1.3　极限的运算

1.3.1　极限的运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

法则 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$.

法则 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$.

当 $g(x)=c$（c 为常数）时，$\lim\limits_{x\to x_0}cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=cA$.

法则 3　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）.

以上极限运算法则对于 $x\to x_{0^+}$、$x\to x_{0^-}$、$x\to+\infty$、$x\to-\infty$、$x\to\infty$ 等情况也都成立，且法则 1、2 可推广到有限个函数极限的情形.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3+2)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 2}x^3=2^3=8$

所以　$\lim\limits_{x\to 2}(2x^3+2)=\lim\limits_{x\to 2}2x^3+\lim\limits_{x\to 2}2=2\lim\limits_{x\to 2}x^3+2=2\times 8+2=18$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{x-3}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-3)=-2\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1)=3$

所以由法则 3 有 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}(2x^2+1)}{\lim\limits_{x\to x_0}(x-3)}=-\dfrac{3}{2}$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)=0$ 同时 $\lim\limits_{x\to -3}(x^2-9)=0$

所以，极限呈现“$\dfrac{0}{0}$”的形式．这是一种“未定式”的极限，显然不能应用法则 3．考虑到函数的分子和分母存在公因式（x+3）．函数 $\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 与函数（x–3）的差别只是在于前者在 $x=-3$ 处无意义，而后者在 $x=-3$ 处有意义，由于函数在点 x_0 处的极限与函数点 x_0 处是否有

意义无关，所以可以先约去公因式，再求极限．

即
$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-3)=-6\text{ .}$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{2x^2+x-1}$．

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x)=\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+x-1)=\infty$．所以，极限呈现“$\dfrac{\infty}{\infty}$”的形式．这也是一种“未定式”的极限．求这种极限的常用方法是：分子、分母同时除以分母中自变量的最高次幂．所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{2+0-0}=\frac{1}{2}$$

例 5　求（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x-2}{2x^3-x^2+7}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-3x^2+4}{x^2-2x+5}$．

解　（1）分子、分母同除以 x^3 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-2}{2x^3-x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^2}}=0$$

（2）分子与分母同除以 x^2 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-3x^2+4}{x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-3+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\infty$$

一般情况下，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^n}=a(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x})^n=0$，其中 a 为常数，n 为正整数．

由例 4 和例 5 可得如下结论：当 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$，$m\in\mathbf{N}$，$n\in\mathbf{N}$ 时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n;\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

1.3.2　两个重要极限

观察图 1-17，因为函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数，所以

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}$$

观察 $x\to0^+$ 时的情况．扇形 AOB 是单位圆的一个部分，圆心角 $\angle AOB=x(0<x<\dfrac{\pi}{2})$，过点 A 作圆的切线交半径 OB 的延长线于 D，过点 B 作 x 轴的垂线，并交 x 轴于点 C．显然

$$BC<\overset{\frown}{AB}\text{ 长}<AD$$

即
$$\sin x<x<\tan x$$

于是有
$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$，于是 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$．从而得到重要极限
$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

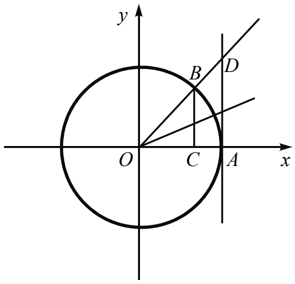


图 1-17

例 6　求下列极限．

（1）$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$．

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{mx} \cdot \frac{nx}{\sin nx} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{n}$

（2）设 $t = \arcsin x$ 则 $x = \sin t$，且当 $x \to 0$ 时，$t \to 0$．
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} = 1$$

今后的研究中还经常会遇到第二个重要极限：
$$\boldsymbol{\lim_{x\to \infty} (1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}}\ \ [\text{或} \boldsymbol{\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}}]\ (\boldsymbol{\mathrm{e} = 2.718\,28\cdots})\text{（证明略）}.$$

例 7　求下列极限．

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} (1-\frac{2}{x})^x$；　（2）$\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x}{x-1})^x$；　（3）$\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\csc 2x}$．

解　（1）$\lim\limits_{x\to\infty} (1-\frac{2}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty} \{[1+(-\frac{2}{x})]^{-\frac{x}{2}}\}^{-2} = \mathrm{e}^{-2}$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x}{x-1})^x = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x-1+1}{x-1})^x = \lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x-1})^{x-1+1} = \lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x-1})^{x-1}(1+\frac{1}{x-1}) = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\csc 2x} = \lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin 2x}} = \lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{2\cos x}}$
$$= \lim_{x\to 0} [(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^{\frac{1}{2\cos x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

当我们利用重要极限求函数的极限时，一定要注意两种重要极限的形式特征．求极限过程的实质就是对函数实施变量代换，经变量代换后的式子将具有重要极限的形式（一般并

不写出代换的过程）.

练习 1.3

1．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n^2-3}{2n^3+2n+1}$；（2）$\lim\limits_{x\to-2}(3x^2-5x+2)$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$；（4）$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$.

2．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{2x}$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{\sin bx}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{x+3}$.

3．利用等价无穷小求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(2x^2)}{1-\cos x}$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin3x}$；（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin^3 x}$.

1.4 函数的连续性

1.4.1 基本概念

1．增量

定义 1.16 设函数 $y=f(x)$，当 x 从 x_0 变化到 x_1 时，差 x_1-x_0 称为**自变量 x 的增量**，记做 Δx，即 $\Delta x=x_1-x_0$（或 $x_1=x_0+\Delta x$）. 在自变量 x 的变化过程中，函数值 y 相应地从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_1)=f(x_0+\Delta x)$，差 $f(x_1)-f(x_0)$ 称为**函数 y 的增量**，记做 Δy，即

$$\Delta y= f(x_1)-f(x_0)= f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

增量的几何表示，如图 1-18 所示. 增量 Δx、Δy 可能是正的，可能是负的. 增量 Δx、Δy 不全为正数时的示意图请读者自己完成.

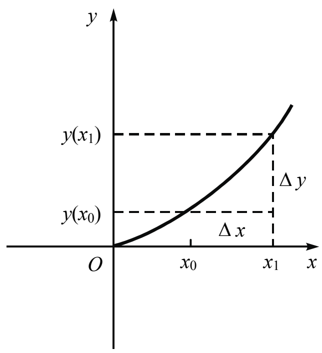


图 1-18

例 1 设函数 $y=f(x)=x^2+1$，求适合下列条件的增量 Δx 和 Δy.

（1）当 x 由 1 变化到 1.2 时；

（2）当 x 由 1 变化到 0.8 时；

（3）当 x 由 1 变化到 $1+\Delta x$ 时.

解 （1）$\Delta x=x_1-x_0=1.2-1=0.2$

$\Delta y= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1.2)-f(1)=0.44$

（2）$\Delta x=x_1-x_0=0.8-1=-0.2$

$\Delta y= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(0.8)-f(1)=-0.36$

（3）$\Delta x=x_1-x_0=1+\Delta x-1=\Delta x$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1+\Delta x)-f(1)=2\Delta x+(\Delta x)^2$$

2．函数的连续性

设函数 $f(x)=\sqrt{x}$，其图像是一条连续的曲线，如图 1-19 所示．当 x 从 1 变化到 $1+\Delta x$ 时，对应的函数值从 $f(1)=1$ 变化到 $f(1+\Delta x)=\sqrt{1+\Delta x}$．

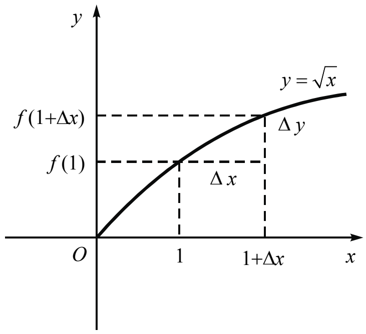


图 1-19

于是，$\Delta y = f(1+\Delta x)-f(1)=\sqrt{1+\Delta x}-1$，当 $\Delta x \to 0$（即 $1+\Delta x \to 1$）时，对应的 $\Delta y \to 0$［即 $f(1+\Delta x)\to f(1)$］.

以上增量的变化过程可用极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(1+\Delta x)-f(1)]=\lim_{\Delta x\to 0}(\sqrt{1+\Delta x}-1)=0$$

来表示，它刻画了函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在点 $x=1$ 处连续的特性.

定义 1.17　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 点处的增量 $\Delta x \to 0$ 时，相应函数的增量 $\Delta y \to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$．则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**，x_0 称为 $f(x)$ 的**连续点**.

例 2　判断函数 $y=2x^2-1$ 在给定点 x_0（$x_0\in\mathbf{R}$）处是否连续.

解　显然，函数在点 x_0 处有意义．由于

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=[2(x_0+\Delta x)^2-1]-(2x_0^2-1)=4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2$$

且
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2]=0$$

所以，函数 $y=2x^2-1$ 在给定点 x_0 处连续.

在定义 1.17 中，令 $x_0+\Delta x=x$，相应地

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，必有 $x\to x_0$．于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$．因此，函数在点 x_0 处连续还可定义如下：

定义 1.18　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，若函数满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**，x_0 称为 $f(x)$ 的**连续点**.

当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 时，称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 时，称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

由定义 3 可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足以下三个条件：

（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

（2）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

（3）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限值等于 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$．

这三个条件称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的三要素，缺少其中任何一个要素，都将导致函数 $f(x)$ 在 x_0 点处不连续．

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0; \\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 2, & x>1. \end{cases}$　试讨论函数在 $x=0$ 及 $x=1$ 处的连续性．

解　函数 $f(x)$ 的图像如图 1-20 所示．

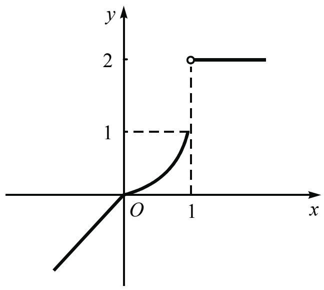


图 1-20

（1）因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，且由 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0$ 得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，又因为 $f(0)=0^2=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

（2）虽然函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义，但由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2=2$，所以，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在．因此，$f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续．

定义 1.19　若函数 $f(x)$ 在开区间（a，b）内的每一点处都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间（a，b）内连续．函数 $f(x)$ 称为区间（a，b）内的**连续函数**，区间（a，b）称为函数 $f(x)$ 的**连续区间**．

若函数 $f(x)$ 在区间（a，b）内连续，且在左端点 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在**闭区间［a，b］上连续**．

1.4.2　初等函数的连续性

可以证明，基本初等函数在其定义域内是连续的．初等函数在其定义区间内也都是连续的．

设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，对于任意的 $x_0\in D$，由函数的连续性可知，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$．不难看出，函数的连续性把求极限的问题简化为求函数值的问题．

例 4　求下列极限．

（1）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin x$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{6-2x^2}$；　　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\lg(x^2+1)$．

解　(1) 由于函数 $\sin x$ 是初等函数，在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) 由于函数 $\sqrt{6-2x^2}$ 是初等函数，在 $x=1$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{6-2x^2}=\sqrt{6-2\times 1^2}=\sqrt{4}=2$$

(3) 由于函数 $\lg(x^2+1)$ 是初等函数，在 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to 0}\lg(x^2+1)=\lg(0^2+1)=0$$

例 5　求函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x+1}}$ 的连续区间.

解　解不等式组 $\begin{cases}1-x>0\\x+1>0\end{cases}$ 得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，由于 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x+1}}$ 是初等函数，所以它的连续区间为 $(-1,1)$.

1.4.3　函数的间断点

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，那么 $f(x)$ 的图像在点 x_0 处就会出现间断．这时把点 x_0 称为 $f(x)$ 的**间断点（或不连续点）**.

例 6　考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 在点 $x=-1$ 处的连续性.

解　因为函数在 $x=-1$ 处无定义，所以，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$，即 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\infty$，此时点 $x=-1$ 称为 $f(x)$ 的无穷间断点，如图 1-21 所示．一般地，只要函数 $f(x)$ 在 x_0 的一侧的极限为无穷大，x_0 即为函数 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

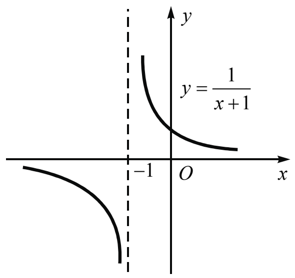


图 1-21

例 7　考察函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解　因为当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to\infty$，在这一过程中，函数值 $\sin\dfrac{1}{x}$ 总是在 -1 和 1 之间变化，而不能趋近于一个确定的常数，因此，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，此时，点 $x=0$ 称为 $f(x)$ 的**振荡间断点**.

例 8 考察函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在．因此函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续．函数在 $x=0$ 处产生跳跃，点 $x=0$ 称为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**，如图 1-22 所示.

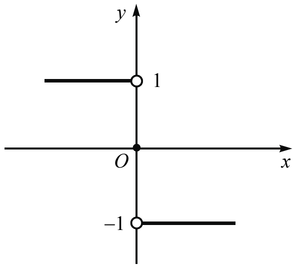


图 1-22

例 9 考察函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1;\\ 1, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

解 虽然 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义，且极限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，但函数值 $f(1)=1$，即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$，所以 $x=1$ 是函数的间断点.

在此题中可以修改函数在 $x=1$ 处的定义，即令 $f(1)=2$，则有 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$，从而使函数在点 $x=1$ 处连续．这时点 $x=1$ 称为 $f(x)$ 的**可去间断点**.

一般地，函数的间断点可以分为两类：

第一类间断点是指函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在的间断点，包含可去间断点和跳跃间断点．第二类间断点是指出函数 $f(x)$在点 x_0 处的左、右极限不都存在的间断点，主要包括无穷间断点和振荡间断点.

1.4.4 闭区间上连续函数的性质

定理 1.2（最大值和最小值定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间［a，b］上连续，则它在这个区间上一定有最大值和最小值.（证明略）

定理的几何意义如图 1-23 所示.

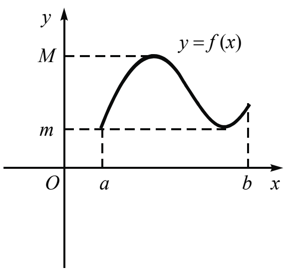


图 1-23

定理 1.3（介值定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间［a，b］上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在［a，b］上的最小值和最大值，则对介于 m 和 M 之间的任意实数 c，至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=c$．（证明略）

定理的几何意义如图 1-24 所示．

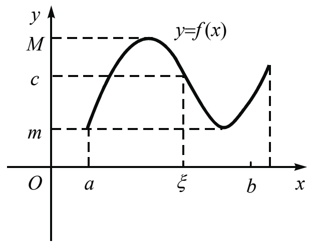


图 1-24

定理 1.4（零值定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间［a，b］上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$．（证明略）

定理的几何意义如图 1-25 所示．

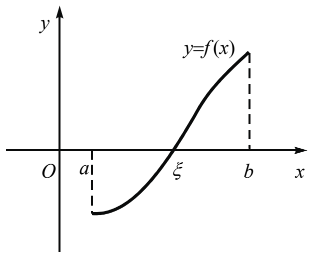


图 1-25

利用零值定理可以求方程 $f(x)=0$ 的近似解.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间［a_0，b_0］上连续，且 $f(a_0)\cdot f(b_0)<0$，那么方程 $f(x)=0$ 在区间［a_0，b_0］内至少有一个解 x_0．

练习 1.4

1．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{t\to-2}\dfrac{e^t+1}{t}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\pi}(\sin\dfrac{x}{2})^3$；

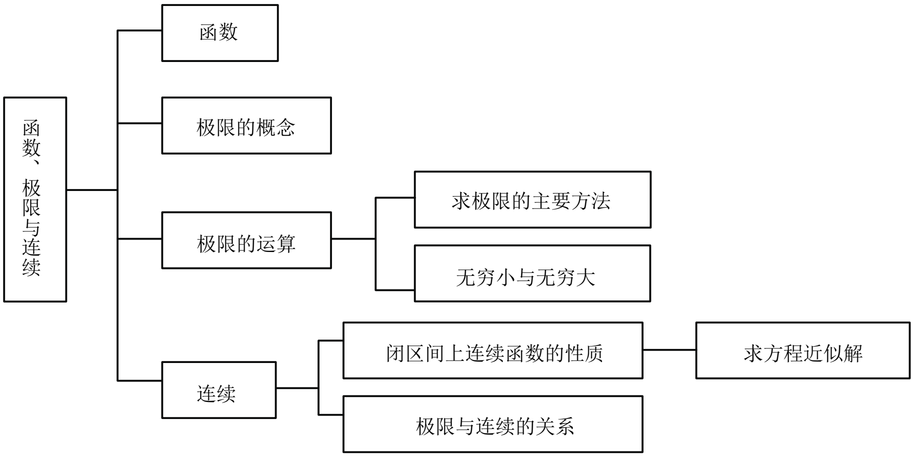
（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(2\cos x)$；　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+2x-x^2}$．

2．考察函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x+1, & x>1\end{cases}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$，$x=1$，$x=2$ 处的连续性，并作出函数的图像.

3．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}4x, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ x^2+1, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$ 在点 $x=2$ 处的连续性.

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x<0;\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 试确定 a 值，使 $f(x)$ 在其定义域内连续.

本章知识结构图

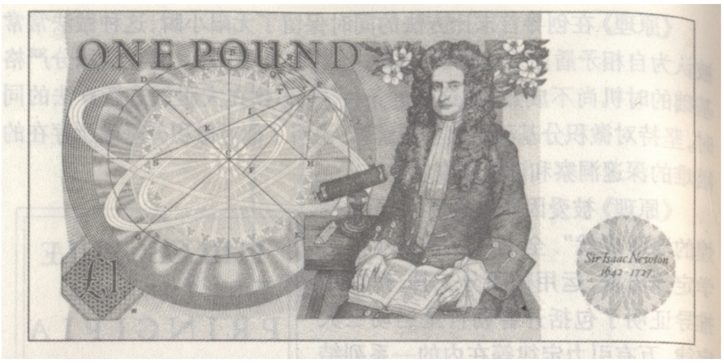


数学史话 2

牛顿（Isaac Newton，1642—1727，英国数学家、物理学家）

牛顿于伽利略去世那年——1642 年（儒略历）的圣诞出生于英格兰林肯郡伍尔索普村一个农民家庭，是遗腹子，且早产，生后勉强存活．少年牛顿不是神童，成绩并不突出，但酷爱读书与制作玩具．17 岁时，牛顿被母亲从他就读的格兰瑟姆中学召回田庄务农，但在牛顿的舅父 W·埃斯库和格兰瑟姆中学校长史托克思的竭力劝说下，牛顿的母亲在九个月后又允许牛顿返校学习．史托克思校长的劝说词中，有一句话可以说是科学史上最幸运的预言，他对牛顿的母亲说："在繁杂的农务中埋没这样一位天才，对世界来说将是多么巨大的损失！"

牛顿于 1661 年入剑桥大学三一学院，受教于巴罗，同时钻研伽利略、开普勒、笛卡儿和沃利斯等人的著作．三一学院至今还保存着牛顿的读书笔记，从这些笔记可以看出，就数学思想的形成而言，笛卡儿的《几何学》和沃利斯的《无穷算术》对他影响最深，正是这两部著作引导牛顿走上了创立微积分之路．



1665 年 8 月，剑桥大学因瘟疫流行而关闭，牛顿离校返乡，随后在家乡躲避瘟疫的两年，竟成为牛顿科学生涯中的黄金岁月．制定微积分，发现万有引力和颜色理论，……，可以说牛顿一生大多数科学创造的蓝图，都是在这两年描绘的．

牛顿的科学贡献是多方面的．在数学上，除了微积分，他的代数名著《普遍算术》，包含了方程论的许多重要成果，如虚数根必成对出现、笛卡儿符号法则的推广、根与系数的幂和公式等；他的几何杰作《三次曲线枚举》，首创三次曲线的整体分类研究，是解析几何发展新的一页；在数值分析领域，今天任何一本教程都不能不提到牛顿的名字：牛顿迭代法（牛顿——拉弗森公式）、牛顿—格列高公式、牛顿—斯特林公式、……，牛顿还是几何概率的最早研究者．

牛顿是一位科学巨人，但他有一次在谈到自己的光学发现时却说："如果我看得更远些，那是因为我站在巨人的肩膀上"．还有一次，当别人问他是怎样作出自己的科学发现时，他的回答是："心里总是装着研究的问题，等待那最初的一线希望渐渐变成普照一切的光明！"据他的助手回忆，牛顿往往一天伏案工作 18 小时左右，仆人常常发现送到书房的午饭和晚饭一口未动．偶尔去食堂用餐，出门便陷入思考，兜个圈子又回到住所．惠威尔（W.Whewell）在《归纳科学史》书中写道："除了顽强的毅力和失眠的习惯，牛顿不承认自己与常人有什么区别"．

牛顿终身未婚，晚年由外甥女凯瑟琳协助管家．牛顿的许多言论、轶闻，就是靠凯瑟琳和她的丈夫康杜得的记录流传下来的．家喻户晓的苹果落地与万有引力的故事，就是凯瑟琳

告诉法国哲学家伏尔泰并被后者写进《牛顿哲学原理》一书中的.

牛顿 1727 年因患肺炎与痛风而逝世，葬于威斯特敏斯特大教堂. 当时参加了葬礼的伏尔泰亲眼目睹英国的大人物争抬牛顿灵柩而无限感慨. 剑桥三一学院教堂大厅内立有牛顿全身塑像. 牛顿去世后，外甥女凯瑟琳夫妇在亲属们围绕遗产的纠纷中不惜代价保存了牛顿的手稿. 现存牛顿手稿中，仅数学部分就达 5000 多页.

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716，德国数学家）

莱布尼茨出生于德国莱比锡一个教授家庭，早年在莱比锡大学学习法律，同时开始接触伽利略、开普勒、笛卡儿、帕斯卡以及巴罗等人的科学思想. 1667 年获阿尔特多夫大学法学博士学位，次年开始为缅因茨选帝侯服务，不久被派往巴黎任大使. 莱布尼茨在巴黎居留了四年（1672—1676），这四年对他整个科学生涯的意义，可以与牛顿在家乡躲避瘟疫的两年类比，莱布尼茨许多重大的成就包括创立微积分都是在这一时期完成或奠定了基础.

莱布尼茨的博学多才在科学史上罕有所比，其著作涉及数学、力学、机械、地质、逻辑、哲学、法律、外交、神学和语言学等. 在数学上，他的贡献也远不止微积分.

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

第 2 章　一元函数微分学

本章从研究物体运动的速度问题开始，引入导数和微分的概念，介绍导数与微分的计算，进而介绍研究变化率的一般方法及导数的应用．导数可以用来测量在各种变化过程中变量的变化率，导数在很多学科中有着广泛的应用．

2.1　导数的概念

当我们研究变量时，不仅需要研究变量与变量之间的对应关系（即函数关系），变量的变化趋势（即极限），还要研究变量的变化快慢程度．这类问题通常称为变化率问题．

我们先来看两个实际问题．

例 1　求变速直线运动的瞬时速度．

当物体作匀速直线运动时，它在任何时刻的速度都可以用公式$v=s/t$计算，其中 s 为物体的位移，t 为时间．但物体作变速直线运动时，这个公式只能反映物体在一段时间内某段位移的平均速度，不能反映物体在某一时刻的瞬时速度．

现在我们来计算变速直线运动的物体的瞬时速度．

设一个物体作变速直线运动，其运动方程为 $s=s(t)$．求该物体在 t 时刻的瞬时速度．

在 t 附近的一段时间间隔内，即从 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，物体的位移为

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$$

当Δt 很小时，我们把变速运动近似地看成是匀速运动．因此，用这段时间间隔的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

近似地描述瞬时速度．由于运动是变化的，所以对任意的固定的Δt，它只是一个近似值．但是，在Δt 无限变小的过程中，平均速度 v 会无限接近 t 时刻的瞬时速度．因此，当Δt 趋于零时，如果极限

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

存在，那么，这个极限值就是变速直线运动的瞬时速度．

例 2　求过曲线上一点的切线斜率．

设曲线 C 及 C 上的一点 M，如图 2-1 所示，任取曲线 C 上异于 M 的点 N，作割线 MN．当点 N 沿曲线移动而趋近于点 M 时，割线 MN 以 M 为支点逐渐转动，并且趋向于一个极限位置，即直线 MT．直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线．设 M（x_0，y_0）是曲线 C 上的一个定点，N（x，y）是曲线 C 上异于 M 的任意一点，如图 2-2 所示，则割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

其中φ为割线 MN 的倾斜角．当 $x\to x_0$（$\varphi\to\alpha$）时，如果极限

$$\tan\alpha = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，那么，这个极限值就是切线 MT 在点 x_0 处的斜率．

从上面两个实际问题中看出，虽然问题的具体意义不同，但是抽象出的数量关系却相同，都是研究函数在某一点处，当自变量的改变量趋近于零时，函数的改变量与自变量的改变量之比的极限．这种特定的极限称为函数的导数．

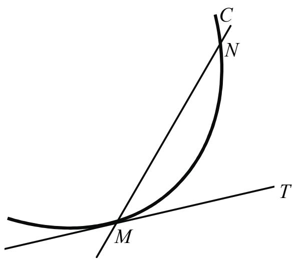


图 2-1

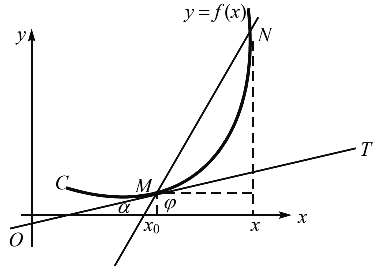


图 2-2

2.1.1　导数的定义

定义 2.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx 即 $x=x_0+\Delta x$ 时，函数 $y=f(x)$ 取得相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$．当 $x\to 0$ 时，若Δy 与Δx 之比的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并把这个极限值称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记做 $y'|_{x=x_0}$．即

$$y'|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.1}$$

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数也可以记做 $f'(x_0)$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$．函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，也称做函数 $f(x)$在点 x_0 处具有导数或导数存在．

在式（2.1）中，如果 $\Delta x\to 0^+$ 时极限存在，那么这个极限值称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右导数**，记做 $f'_+(x_0)$；如果 $\Delta x\to 0^-$ 时极限存在，那么这个极限值称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记做 $f'_-(x_0)$．可以证明

$$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$$

导数概括了各种实际问题的变化率概念，反映了在点 x_0 处函数随自变量变化的快慢程度．由于变化率是一个极其广泛的概念，因此导数有着广泛的应用．

前面的两个例子中，瞬时速度就是位移对时间的导数，即 $v=s'(t)$；曲线上某一点切线的斜率就是对应函数对自变量 x 的导数，即 $k=f'(x_0)$．

如果式（2.1）的极限不存在，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导，如果在点 x_0 处不可导的原因是当 $\Delta x\to 0$ 时 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大．

如果函数 $y=f(x)$ 在区间（a，b）内的每一点处都可导，即对任意 $x\in(a，b)$，极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

都存在，那么我们就说函数 $y = f(x)$ 在区间（a，b）内可导．这时，对于每一点 $x \in (a, b)$，函数都有一个确定的导数值与之对应，这就构成了定义在区间（a，b）内关于 x 的一个新函数，这个新函数称为函数 $y=f(x)$对 x 的**导函数**，记为 $f'(x)$， y'， $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{d}{dx} f(x)$．即

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.2}$$

此时函数 $f(x)$ 称为导函数 $f'(x)$ 的**原函数**．

例如，如果对于定义域中的任意 x，都有 $(3x^2+4x-6)' = 6x+4$，则函数 $y = 6x+4$ 称为函数 $y = 3x^2+4x-6$ 的导函数，而函数 $y = 3x^2+4x-6$ 称为函数 $y = 6x+4$ 的原函数．

显然，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的函数值，即

$$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$$

今后，在不引起混淆的情况下，导函数和导数统称为**导数**．

利用定义求函数 $y = f(x)$ 的导数，一般包括三个步骤：

（1）求函数的增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$；

（2）计算比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$；

（3）求极限 $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$．

例 3　求函数 $y = C$（C 是常数）的导数．

解　（1）求函数的增量

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

（2）计算比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

（3）求极限

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

即

$$(C)' = 0 \text{（} C \text{ 是常数）}$$

例 4　求函数 $y=x^2$ 的导数．

解　（1）求函数的增量

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

（2）计算比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

（3）求极限

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

即

$$(x^2)' = 2x$$

可以证明，幂函数 $y = x^a$（a 是任意实数）的导数为

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

正弦函数的导数公式为

$$(\sin x)' = \cos x$$

余弦函数的导数公式为

$$(\cos x)' = -\sin x$$

对数函数的导数公式为

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

当 $a = \mathrm{e}$ 时得到自然对数的导数公式

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

利用定义求函数的导数一般是比较麻烦的，实际计算时，经常利用导数公式来计算函数的导数.

例 5　求下列函数的导数.

（1） $y = x^4$；　　（2） $(\log_2 x)'\big|_{x=4}$.

解　（1）由公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ 知

$$y' = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$$

（2）由公式 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ 知

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x\ln 2}$$

所以

$$(\log_2 x)'\big|_{x=4} = \left.\frac{1}{x\ln 2}\right|_{x=4} = \frac{1}{4\ln 2}$$

2.1.2　导数的几何意义

由本节开始的例 2 可知，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义是曲线 $y = f(x)$ 在点 M（x_0，y_0）处切线的斜率，即

$$k = f'(x_0) = \tan\alpha$$

其中，α为切线的倾斜角.

根据导数的几何意义，利用直线的点斜式方程容易得到，曲线 $y = f(x)$ 在点 M（x_0，y_0）处的切线方程为

$$y-y_0= f'(x_0)(x-x_0)$$

过切点 M 且与切线垂直的直线称为曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处的**法线**. 如果 $f'(x_0) \neq 0$，法线的斜率为 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$，从而曲线 $y = f(x)$ 在点 M（x_0，y_0）处的法线的方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

例 6　在曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 上，哪一点处的切线与直线 $y=3x-1$ 平行？

解　已知直线 $y=3x-1$ 的斜率 $k=3$，由直线平行的条件可知，所求切线的斜率为 3.

由于

$$y' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}\sqrt{x}，故 \frac{3}{2}\sqrt{x} = 3$$

解得

$$x=4$$

将 $x=4$ 代入所给曲线方程，得

$$y = 4^{\frac{3}{2}} = 8$$

所以曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 在点（4，8）处的切线与直线 $y=3x-1$ 平行．

例 7　求曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在点（1，1）处切线的斜率，并写出曲线在该点处的切线方程和法线方程．

解　由导数的几何意义知，所求切线的斜率为

$$k_1=y'\big|_{x=1}$$

由于

$$y'=(\frac{1}{\sqrt{x}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

于是

$$k_1=y'\big|_{x=1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\bigg|_{x=1}=-\frac{1}{2}$$

从而所求切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

即

$$x+2y-3=0$$

所求法线的斜率为 $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=2$，于是，所求法线方程为

$$y-1=2(x-1)$$

即

$$2x-y-1=0$$

2.1.3　可导与连续的关系

设函数 $y=f(x)$在点 x 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

由极限与无穷小的关系知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$$

其中α是当$\Delta x\to 0$时的无穷小．上式两边同时乘以Δx，得

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$$

由此可见，当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$．这就是说，函数 $y=f(x)$在点 x 处是连续的．

定理 2.1　如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，那么，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处一定连续．

需要注意的是，函数 $y=f(x)$在某一点连续，但是不一定在该点可导．

例如，函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间（$-\infty$，$+\infty$）内连续，但在点 $x=0$ 处不可导．这时因为，在点 $x=0$ 处有

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}-0}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}}$$

因而 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}}=+\infty$，故导数不存在．其几何意义是曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点处具有垂直于 x 轴的切线 $x=0$，如图 2-3 所示．

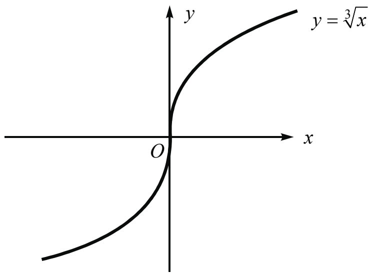


图 2-3

再如，函数 $y=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 在点 x=0 处连续，但在该点不可导．这是因为在点 x=0 处有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2}-\sqrt{0^2}}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

右导数 $$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$

左导数 $$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$$

因为左、右导数不相等，所以函数 $y=\sqrt{x^2}$ 在点 x=0 处不可导，其几何意义是曲线 $y=\sqrt{x^2}$ 在原点处没有切线，如图 2-4 所示．

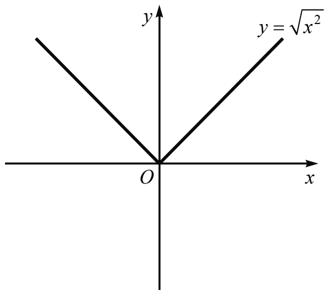


图 2-4

注意

由上面的讨论可知，函数在某一点处连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件．所以，如果函数在某点处不连续，那么函数在该点处必不可导．

练习 2.1

1．根据定义，求下列函数的导数．

（1） $f(x)=3x+2$； （2） $y=\dfrac{1}{x}$．

2．利用公式 $x^a=a\,x^{a-1}$，求下列各函数的导数．

（1） $y=x^4$；　　（2） $y=\sqrt[5]{x^2}$；　　（3） $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

3．设 $f'(x_0)$ 存在，按照导数定义观察下列极限，指出字母 A 所表示的意义.

（1） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=A$；　　（2） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$.

4．已知物体的运动规律为 $s=t^3$（m），求物体在 $t=2$（s）时的速度.

5．求曲线 $y=x^3$ 在 $x=2$ 的切线方程与法线方程.

2.2　初等函数的导数

本节将介绍函数的求导法则和基本初等函数的导数公式，利用它们可以简化导数的计算.

2.2.1　函数的求导法则

1．函数的和与差的求导法则

法则 1　设函数 $u(x)$和 $v(x)$在点 x 处都可导，则函数 $y(x)=u(x)\pm v(x)$在点 x 处也可导，并且

$$y'(x)=(u\pm v)'=u'\pm v' \tag{2.3}$$

这个法则对于有限个可导函数的和（差）也成立．例如

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'$$

2．函数的积的求导法则

法则 2　设函数 $u(x)$和 $v(x)$在点 x 处都可导，则函数 $y(x)=u(x)v(x)$ 在点 x 处也可导，并且

$$(uv)'=u'v+uv' \tag{2.4}$$

特别是当其中一个函数为常数 c 时，有

$$(cu)'=cu' \tag{2.5}$$

上面的公式对于有限多个可导函数的积也成立．例如

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$$

3．函数的商的求导法则

法则 3　设函数 $u(x)$和 $v(x)$在点 x 处都可导，并且 $v(x)\neq 0$，则函数 $y(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x 处也可导，并且

$$y'(x)=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \tag{2.6}$$

特别地，当 $u=1$，$v\neq 0$ 时，有

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2} \tag{2.7}$$

下面我们证明法则 2，其他法则的证明请读者自己完成.

*证　设自变量 x 有增量 Δx，则函数 $u(x)$，$v(x)$ 及 $y=u(x)v(x)$ 相应地有增量 Δu，Δv 及 Δy. 因为

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

故
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$$

从而
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right)$$

因为函数 $u(x)$，$v(x)$ 在点 x 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'，\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$$

故函数 $v(x)$ 在点 x 处必连续，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$$

由此得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v+u\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\right)=u'v+uv'$$

于是
$$y'=u'v+uv'$$

即
$$(uv)'=u'v+uv'$$

例 1　求函数 $y=5x^2-\dfrac{1}{x}+4\sin x$ 的导数.

解　$y'=5(x^2)'-(x^{-1})'+4(\sin x)'$

$=5(2x)-(-x^{-2})+4(\cos x)$

$=10x+\dfrac{1}{x^2}+4\cos x$

例 2　求函数 $y=x^3\ln x$ 的导数.

解
$$y'=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'=3x^2\ln x+x^2$$

例 3　已知 $f(x)=x^3+4\cos x+\sin\dfrac{\pi}{2}$，求 $f'(x)$ 及 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解　因为
$$f'(x)=3x^2-4\sin x$$

所以
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi^2-4$$

例 4　已知 $y=\sqrt{x}\sin x$，求 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

解　　因为 $y'=(\sqrt{x})'\sin x+\sqrt{x}(\sin x)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x+\sqrt{x}\cos x$

$$=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos x$$

所以
$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

例 5　$f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$，求 $f'(x)$ 及 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解
$$f'(x)=\frac{(x\sin x)'\cdot(1+\cos x)-x\sin x\cdot(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{[(x)'\sin x+x(\sin x)']\cdot(1+\cos x)-x\sin x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{(\sin x+x\cos x)\cdot(1+\cos x)+x\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

整理得
$$f'(x)=\frac{x+\sin x}{1+\cos x}$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{2}+1}{1+0}=1+\frac{\pi}{2}$$

2.2.2　复合函数的导数

我们来研究函数 $y=\sin 2x$ 的导数．由于 $y=\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$，所以
$$y'=2\,[(\sin x)'\cos x+\sin x\cdot(\cos x)']=2(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos 2x$$
显然运算 $(\sin 2x)'=\cos 2x$ 是错误的，发生错误的原因是由于 $y=\sin 2x$ 是由 $y=\sin u$和 $u=2x$ 组成的复合函数，不能直接应用正弦函数的导数公式．

下面介绍复合函数的求导方法．

法则 4　如果函数 $u=\varphi(x)$在 x 处可导，而函数 $y=f(u)$在对应的 u 处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\tag{2.8}$$

***证**　由于函数 $y=f(u)$ 在点 u 处可导，故极限 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ 存在．由函数的极限与无穷小的关系知
$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\alpha\text{（其中}\alpha\text{ 是 }\Delta u\to 0\text{ 时的无穷小）.}$$
两边同乘以Δu，得
$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\Delta u+\alpha\Delta u$$
两边同除以Δx，得
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
于是
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$
由于 $u=\varphi(x)$在 x 处可导，故 $u=\varphi(x)$在 x 处连续，当 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta u\to 0$，从而
$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0$$
又
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

所以
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

（2.8）式也可以写成 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 或 $y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x)$，其中 y'_x 表示 y 对 x 的导数，y'_u 表示 y 对 u 的导数，而 u'_x 表示中间变量 u 对自变量 x 的导数．

例6 求下列函数的导数．

（1）$y=\ln\tan x$；（2）$y=\cos\dfrac{x^2}{5+x}$．

解 （1）$y=\ln\tan x$ 由 $y=\ln u$ 和 $u=\tan x$ 复合而成，因此
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\cdot\sec^2 x=\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x=\frac{1}{\sin x\cos x}=2\csc 2x$$

（2）$y=\cos\dfrac{x^2}{5+x}$ 由 $y=\cos u$，$u=\dfrac{x^2}{5+x}$ 复合而成，由于
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=-\sin u,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2x(5+x)-1\left(x^2\right)}{(5+x)^2}=\frac{10x+x^2}{(5+x)^2}$$
故
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\sin u\cdot\frac{10x+x^2}{(5+x)^2}=-\frac{10x+x^2}{(5+x)^2}\cdot\sin\frac{x^2}{5+x}$$

例7 设 $y=\ln(1+x^2)$，求 y'．

解 $y=\ln(1+x^2)$ 由 $y=\ln u$ 和 $u=1+x^2$ 复合而成，因此
$$y'=[\ln(1+x^2)]'=(\ln u)'_u\cdot u'_x=\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

在求复合函数的导数时，一般不写出中间变量，而是按照由外向内的顺序，分步依次求出各层的导数．这样例7的解题过程可以写做
$$y'=[\ln(1+x^2)]'=\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

例8 设 $y=\sqrt[3]{2x^2-5}$，求 y'．

解
$$y'=\left(\sqrt[3]{2x^2-5}\right)'=\frac{1}{3}\left(2x^2-5\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x^2-5)'=\frac{4x}{3\sqrt[3]{\left(2x^2-5\right)^2}}$$

复合函数的求导法则又称为**链式法则**，它可以推广到多个复合过程的情形．

例9 设 $y=\ln\sin 2x$，求 y'．

解 $y=\ln\sin 2x$ 由 $y=\ln u$、$u=\sin v$ 和 $v=2x$ 复合而成，因此
$$\begin{aligned}y'&=(\ln\sin 2x)'=\frac{1}{\sin 2x}(\sin 2x)'\\&=\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot(2x)'\\&=\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2\\&=2\cot 2x\end{aligned}$$

2.2.3 导数公式

为了便于查阅，我们把基本初等函数的导数公式和求导法则归纳如下：

1．基本初等函数的导数公式

（1）$(c)'=0$；（2）$(x^{a})'=ax^{a-1}$；

（3）$(a^{x})'=a^{x}\ln a$；（4）$(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$；

（5）$(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；（6）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

（7）$(\sin x)'=\cos x$；（8）$(\cos x)'=-\sin x$；

（9）$(\tan x)'=\sec^{2}x$；（10）$(\cot x)'=-\csc^{2}x$；

（11）$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$；（12）$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$；

（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ （$-1<x<1$）；

（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ （$-1<x<1$）；

（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$ （$-\infty<x<+\infty$）；

（16）$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$ （$-\infty<x<+\infty$）.

2．函数的求导法则

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$在 x 处都可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；（2）$(cu)'=cu'$（c 为常数）；

（3）$(uv)'=u'v+uv'$；（4）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}}$；

（5）设 $u=\varphi(x)$在 x 处可导，$y=f(u)$在对应的 u 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的导数为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 或 $y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x)$.

练习 2.2

1．求下列函数的导数.

（1）$y=3x^{2}-\dfrac{2}{x^{2}}+5$；（2）$y=x^{2}(2+\sqrt{x})$；

（3）$y=x^{3}+\cos x$；（4）$y=\dfrac{\ln x}{\sin x}$；

2．求下列函数在给定点处的导数.

（1）$y=\sin x+2\cos x$，在 $x=0$ 及 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

（2）$f(t)=\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$，在 $t=4$ 处.

3．求下列函数的导数.

（1） $y=(2x+5)^4$；（2） $y=\cos(4-3x)$；

（3） $y=\ln(1-x)$；（4） $y=\ln x^2+(\ln x)^2$.

4．求下列函数的导数.

（1） $y=\mathrm{e}^{x+3}$；（2） $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$；（3） $y=2^{2x^2-1}$.

2.3 隐函数的导数及高阶导数

2.3.1 隐函数的导数

在实际问题中，经常需要求隐函数的导数. 而将隐函数化为显函数有时是比较困难的，所以我们需要研究隐函数的求导方法.

由于在用方程表示函数关系的隐函数中，y 依然是 x 的函数，故隐函数求导的基本方法是，方程两端同时对自变量 x 求导，要注意到 y 是 x 的函数，当遇到含有函数 y 的项时，要使用链式法则. 这样就会得到一个含有 y' 的等式，整理可以得到 y'. 下面通过例题来说明这种方法.

例 1 求由方程 $2x^2-y^2=9$ 所确定的隐函数 y 的导数.

解 方程两边同时对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数. 得

$$(2x^2)'-(y^2)'=(9)'$$

即
$$4x-2yy'=0$$

整理得
$$y'=\frac{2x}{y}$$

例 2 求由方程 $\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}=0$ 所确定的隐函数 y 的导数.

解 方程两边同时对 x 求导，得

$$(\mathrm{e}^y)'+(xy)'=(\mathrm{e})'$$

$$\mathrm{e}^y\cdot y'+x'y+xy'=0$$

即
$$\mathrm{e}^y\cdot y'+y+xy'=0$$

整理得

$$y'=-\frac{y}{x+\mathrm{e}^y}$$

从以上两例中看到，隐函数的导数的表达式中，一般可以含有 y，这与显函数的导数是不同的.

例 3 求曲线 $xy+\ln y=1$ 在点 M（1，1）处的切线方程.

解 由导数的几何意义可知，所求切线的斜率为

$$k=y'|_{x=1}$$

方程两边分别对 x 求导，得

$$y+xy'+\frac{1}{y}y'=0$$

整理得

$$y'=\frac{-y}{x+\frac{1}{y}}=-\frac{y^2}{xy+1}$$

在点 M（1，1）处有 $$y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{2}$$

于是，在点 M（1，1）处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

即 $$x+2y-3=0$$

2.3.2　取对数求导法

我们在求导时经常会遇到这样的情形，虽然给定的函数是显函数，但由于其函数解析式比较复杂，直接求它的导数很困难或很麻烦．在这种情形下，可以考虑利用对数的性质，首先在 $y=f(x)$ 的两边取对数，然后再利用隐函数求导法求出 y 的导数．这种求导数的方法称为**取对数求导法**．

例 4　求 $y=x^{\sin x}$（$x>0$）的导数．

解　该函数既不是幂函数又不是指数函数，通常称为**幂指函数**．为了求这类函数的导数，可以先在两边取对数（不妨取自然对数），得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

两边同时对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

例 5　求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$（$x>4$）的导数．

解　本题如果利用复合函数求导法计算比较麻烦，考虑到所给的函数是乘积与开方的复合形式，故可以利用对数的性质，采用取对数求导法来计算．两边取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)\right]$$

上式两边对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

于是 $$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

注意

一般地，求由几个含有变量的因式的乘、除、乘方、开方所构成的函数求导时，采用对数求导法也是比较简便的．

2.3.3 高阶导数

如果函数 $y=f(x)$的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数，并且在 x 处仍可导，那么我们把函数 $y'=f'(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$在点 x 处的二阶导数，记做 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')' \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

相应地，把 $y=f(x)$的导数 $y'=f'(x)$ 称为函数 $y=f(x)$的一阶导数.

类似地，二阶导数的导数，称为三阶导数；三阶导数的导数，称为四阶导数，……. 一般地，（n −1）阶导数的导数，称为 n 阶导数，分别记做

$$y''',\quad y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\ \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}.$$

函数 $y=f(x)$具有 n 阶导数，也常说成函数 $f(x)$ n 阶可导.

二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

例 6 求下列函数的二阶导数.

（1） $y=2x^3+3x^2-9$；（2） $y=x\sin x$.

解 （1） $y'=6x^2+6x$， $y''=12x+6$；

（2） $y'=\sin x+x\cos x$， $y''=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$.

例 7 设 $f(x)=x^2\ln x$，求 $f'''(2)$.

解 $f'(x)=2x\ln x+x \qquad f''(x)=2\ln x+3 \qquad f'''(x)=\dfrac{2}{x}$

故

$$f'''(2)=1$$

例 8 求下列函数的 n 阶导数.

（1） $y=\mathrm{e}^x$；（2） $y=\sin x$.

解 （1） $y'=\mathrm{e}^x$， $y''=\mathrm{e}^x$， $y'''=\mathrm{e}^x$，…， $y^{(n)}=\mathrm{e}^x$

即

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$$

（2）

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)}=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \cdots$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

即

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

2.3.4　利用函数型计算器计算函数在点 x_0 处的导数

随着计算工具的发展，目前许多函数型计算器已经具备计算函数在一点的导数的功能，能够达到工程需要的精度，由于计算器体积小、携带及使用都很方便，所以利用计算器来计算导数有很高的实用价值．

下面以 CASIO fx－991ES 型计算器为例，介绍如何利用计算器计算函数在某点的导数．

计算器设有$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}$键，按键$\boxed{\text{SHIFT}}$和键$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}$，接着按键$\boxed{\text{ALPHA}}$输入函数解析式和点 x_0 的值，按键$\boxed{=}$即可得到函数在点 x_0 处的导数．

例 9　利用计算器求函数 $y = x\sin x$ 在点 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的导数．

解　在普通计算模式（COMP）下，依次按键：

$\boxed{\text{SHIFT}} \to \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} \to \boxed{\text{ALPHA}} \to \boxed{x} \to \boxed{\sin} \to \boxed{\text{ALPHA}} \to \boxed{x} \to \boxed{)}$.

然后，将屏幕显示光标移至脚码处输入 $\frac{\pi}{4}$，按键$\boxed{=}$显示结果：0.027 413 850 65，即

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0.027\,413\,850\,65$$

练习 2.3

1．求下列隐函数的导数．

（1）$x^2 - 2xy + 9 = 0$；　　（2）$xe^y - 10 + y^2 = 0$；

（3）$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$（$a$ 为常数）；　　（4）$x - \sin\frac{y}{x} + \tan\alpha = 0$．

2．用取对数求导法求下列函数的导数．

（1）$y = x^{\frac{1}{x}}$　$(x > 0)$；　　*（2）$y = \dfrac{(3-x)^4\sqrt{x+2}}{(x+1)^5}$　$(-1 < x < 3)$．

3．求下列函数的高阶导数．

（1）$y = x^3\ln x$，求 y''；　　（2）$y = xe^x$，求 y'''；

（3）$y = 2^{3x}$，求 y''；　　（4）$y = 2x^2 + \ln x$，求 y''．

4．求曲线 $x + x^2y^2 - y = 1$ 在点（1，1）处的切线方程．

2.4　微分及其应用

2.4.1　微分的概念

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处，当自变量有改变量 Δx 时，函数的相应改变量需要用公式 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ 来计算，这往往是比较麻烦的．现在我们来寻求当 Δx 很小时，能近似代替 Δy 的量．

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

有
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

式中，α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量.

上式可写做

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

这表明函数的增量可以表示为两项之和：第一项 $f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数；第二项是比 Δx 高阶的无穷小．因此，当 Δx 很小时，可以用第一项 $f'(x_0)\Delta x$ 来代替 Δy，并把它称为函数 $f(x)$在点 x_0 处的微分.

定义 2.2　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处有导数 $f'(x_0)$，则 $f'(x_0)\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的**微分**，记做 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$，即

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x \tag{2.9}$$

此时也称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微．显然，函数的微分与 x_0 和 Δx 有关.

函数 $y=f(x)$在某区间内任意点 x 处的微分，称为函数在该区间内的微分．记做

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$$

例 1　求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$，$\Delta x=0.01$ 时函数的增量及微分.

解
$$\Delta y=(1+0.01)^2-1^2=1.0201-1=0.0201$$

$$\mathrm{d}y|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=f'(x)\Delta x|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=2\times 1\times 0.01=0.02$$

取函数 $f(x)=x$，可以得到 $\mathrm{d}x=\Delta x$．于是函数 $y=f(x)$ 的微分记做

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

从而有
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$$

这就是说，函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商就是该函数的导数．因此，导数又称为微商.

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$的图形是曲线 C．点 M（x_0，y_0）是曲线上的点，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，对应曲线上的点 N（$x_0+\Delta x$，$y_0+\Delta y$），如图 2-5 所示．则

$$MQ=\Delta x,\quad QN=\Delta y$$

过点 M 作曲线的切线 MP，它的倾斜角为α，则

$$QP=MQ\ \tan\alpha=\Delta x f'(x_0)$$

即
$$\mathrm{d}y=QP$$

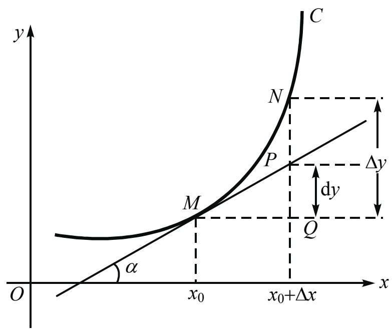


图 2-5

由此可见，当 Δy 是曲线 $y=f(x)$上的纵坐标的增量时，$\mathrm{d}y$ 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量．由于当$|\Delta x|$很小时，$|\Delta y-\mathrm{d}y|$比$|\Delta x|$小得多，因此，在点 M 邻近，我们不仅可以用线段 QP 来近似代替线段 QN，而且还可以用切线段来近似代替曲线段.

2.4.2　微分公式与微分运算法则

从函数微分的表达式

$$dy = f'(x)dx$$

可以看出，计算函数的微分，只需先计算函数的导数，然后再乘以自变量的微分．由此得到微分公式和微分运算法则．

1．基本初等函数的微分公式

由基本初等函数的导数公式可以直接得到基本初等函数的微分公式．现与导数公式对照如表 2-1 所示．

表 2-1

导数公式	微分公式
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$
$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$	$d(\sec x) = \sec x \cdot \tan x dx$
$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$	$d(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x dx$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$d(a^x) = a^x \ln a dx$
$(e^x)' = e^x$	$d(e^x) = e^x dx$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}dx$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$
$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\text{arccot}\, x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

2．函数的和、差、积、商的微分法则

由函数的和、差、积、商的导数运算法则，可以得到相应的微分运算法则，如表 2-2 所示，表中 $u=u(x)$，$v=v(x)$．

表 2-2

函数的和、差、积、商的求导法则	函数的和、差、积、商的微分法则
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(cu)' = cu'$	$d(cu) = c du$
$(uv)' = u'v + uv'$	$d(uv) = v du + u dv$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$

3．微分形式的不变性

我们知道，如果函数 $y=f(u)$是 u 的函数，那么函数的微分为

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$$

如果 u 不是自变量，而是 x 的可导函数 $u=\varphi(x)$ 时，u 对 x 的微分为

$$\mathrm{d}u = \varphi'(x)\mathrm{d}x$$

那么以 u 为中间变量的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$
$$= f'(u)[\varphi'(x)\mathrm{d}x] = f'(u)\mathrm{d}u$$

即

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u \tag{2.10}$$

这说明，在函数的微分表达式（2.10）中，u 既可以是自变量，也可以是中间变量．也就是说，函数 $y=f(u)$的微分 $\mathrm{d}y$ 总可以用 $f'(u)$ 与 $\mathrm{d}u$ 的乘积来表示．微分的这种性质称为“微分形式的不变性”．

例 2 求函数 $y=\cos(2x^2+1)$ 的微分 $\mathrm{d}y$．

解 1 因为

$$[\cos(2x^2+1)]' = -\sin(2x^2+1)\cdot(2x^2+1)'$$
$$= -4x\sin(2x^2+1)$$

所以

$$\mathrm{d}y = -4x\sin(2x^2+1)\mathrm{d}x$$

解 2

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}[\cos(2x^2+1)] = -\sin(2x^2+1)\mathrm{d}(2x^2+1)$$
$$= -4x\sin(2x^2+1)\mathrm{d}x$$

解法 2 体现了微分形式的不变性，是我们常用的方法．

例 3 求函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}$ 在 $x=0$，$\Delta x=0.01$ 的微分．

解 因为

$$\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}(\sqrt{2x+1}) = \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}(2x+1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$$

所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=0\\ \Delta x=0.01}} = \frac{\mathrm{e}}{100}$$

2.4.3 参数式函数的导数

我们知道，由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

所确定的函数叫做参数式函数．在实际问题中，由于有些参数式函数消去参数进行转化比较困难，故需要讨论直接求由参数方程所确定的参数式函数的导数的方法．

由于导数是微商，故分别求出 y 与 x 的微分，即可得到导数．

于是有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)\mathrm{d}t}{\varphi'(t)\mathrm{d}t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \tag{2.11}$$

例 4　求由参数方程$\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$所确定的函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-3t^2$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-3t^2}{-2t}=\frac{3t^2-1}{2t}$$

例 5　已知椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

求椭圆在$t=\dfrac{\pi}{4}$处的切线方程，如图 2-6 所示.

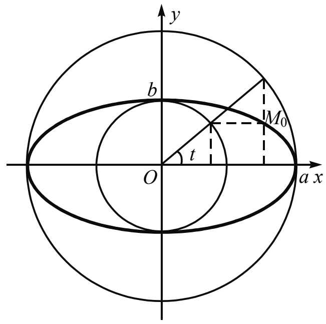


图 2-6

解　当$t=\dfrac{\pi}{4}$时，椭圆上的相应点M_0的坐标是（x_0，y_0），则

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{b\sqrt{2}}{2}$$

曲线在点M_0的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$$

代入点斜式方程，得椭圆在点M_0处的切线方程

$$y-\frac{b\sqrt{2}}{2}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

即

$$bx+ay-\sqrt{2}ab=0$$

2.4.4　微分在近似计算中的应用

利用微分可以得到一些比较复杂问题的简单的近似计算公式，在实际问题中，这些公式有广泛的应用. 例如，如果$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)\neq 0$，那么，当$|\Delta x|$很小时，有近似公式

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x \tag{2.12}$$

又因为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

于是有

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \tag{2.13}$$

在式（2.13）中，令$x=x_0+\Delta x$，即$\Delta x=x-x_0$，则式（2.13）可改写为

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \tag{2.14}$$

例 6　利用微分计算$\sin 30^\circ 30'$.

解　把$\sin 30^\circ 30'$化为弧度，得$\sin 30^\circ 30'=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}$. 设$f(x)=\sin x$，则

$$f'(x)=\cos x$$

取 $x_0=\dfrac{\pi}{6}$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ 与 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，并且$\Delta x=\dfrac{\pi}{360}$ 比较小.
应用式（2.13）得

$$\sin 30^\circ 30'=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}=0.5000+0.0076=0.5076$$

***例 7** 设某国家的国民经济消费模型为

$$y=10+0.4x+0.01x^{\frac{1}{2}}$$

其中 y 为总消费（单位：十亿元），x 为可支配收入（单位：十亿元）. 当 x=100.05 时，问总消费是多少？

解 令 x_0=100，Δx=0.05，因为Δx 相对于 x_0 较小，可用上面的近似公式来求值.

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x)&\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\\&=(10+0.4\times100+0.01\times100^{\frac{1}{2}})+(10+0.4x+0.01x^{\frac{1}{2}})'|_{x=100}\cdot\Delta x\\&=50.1+\left(0.4+\frac{0.01}{2\sqrt{x}}\right)\bigg|_{x=100}\times0.05\\&=50.120\,025\text{（十亿元）}\end{aligned}$$

在（2.14）式中取 x_0=0，于是当$|x|$很小时有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x \tag{2.15}$$

利用（2.15）式可以得到几个工程上常用的近似公式（$|x|$是比较小的值）：

（1）$\sqrt[n]{1+x}\approx1+\dfrac{1}{n}x$；

（2）$\sin x\approx x$（x 以弧度为单位来表达）；

（3）$\tan x\approx x$（x 以弧度为单位来表达）；

（4）$\mathrm{e}^x\approx1+x$；

（5）$\ln(1+x)\approx x$.

证 （1）取 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，那么 $f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{n}$，代入（2.15）式得

$$\sqrt[n]{1+x}\approx1+\frac{1}{n}x$$

（2）取 $f(x)$=sin$x$，那么 $f(0)=0$，$f'(0)=\cos x|_{x=0}=1$，代入（2.15）式得

$$\sin x\approx x$$

其他几个近似公式可用类似方法证明，证明过程由读者自己完成.

练习 2.4

1．将适合的函数填入下列括号，使等号成立.

（1）$\mathrm{d}(3x+2)=$______$\mathrm{d}x$； （2）$\mathrm{d}(\sin at)=$______$\mathrm{d}t$；

（3）$\mathrm{d}(\dfrac{1}{1+x})=$______$\mathrm{d}x$； （4）$\mathrm{d}(\ln(1+x))=$______$\mathrm{d}x$；

（5）$\mathrm{d}(\quad) = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$；　（6）$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x}) =$ ________ $\mathrm{d}x$．

2．求下列函数的微分．

（1）$y = \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$；　（2）$y = \mathrm{e}^{\cot x}$；

（3）$y = \sqrt{2-5x^2}$；　（4）$y = \ln\sqrt{1-x^3}$．

3．求下列参数式函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

（1）$\begin{cases} x = 2+t^2 \\ y = t\ln t \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x = 1-\arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

4．利用微分求下列近似值．

（1）$\sqrt[5]{0.99}$；　（2）$\mathrm{e}^{0.02}$．

2.5　中值定理与洛必达法则

2.5.1　中值定理

定理 2.2（罗尔定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间［a，b］上连续，在开区间（a，b）内可导，且 $f(a)=f(b)$，那么在（a，b）内至少有一点 ξ（$a<\xi<b$），使得等式 $f'(\xi)=0$ 成立（证明从略）．

罗尔定理的几何意义如图 2-7 所示，在区间（a，b）内可导的函数 $y=f(x)$ 的图像是一条光滑曲线．由于这条曲线的两个端点 A、B 的纵坐标相等，故可以看到，曲线上至少存在一点 C，在该点处曲线的切线是水平的．

定理 2.3（拉格朗日中值定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间［a，b］上连续，开区间（a，b）内可导，那么在（a，b）内至少存在一点 ξ（$a<\xi<b$），使等式

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \tag{2.16}$$

成立（证明从略）．

可以把（2.16）式改写成

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

如图 2-8 所示，可以看出 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 恰好是弦 AB 的斜率，而 $f'(\xi)$ 为曲线在点 C 处的切线的斜率．因此拉格朗日中值定理的几何意义是：如果连续曲线 $y=f(x)$ 上除端点外都具有不垂直于 x 轴的切线，那么曲线上至少有一点 C，使曲线在 C 点处的切线平行于弦 AB．

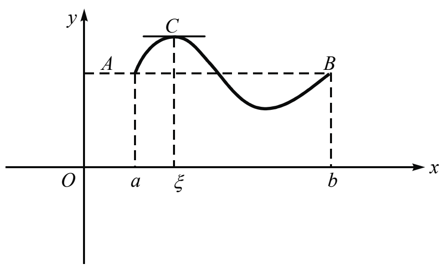


图 2-7

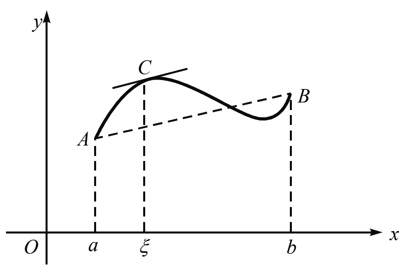


图 2-8

当 $f(a)=f(b)$ 时，拉格朗日中值定理就是罗尔中值定理，因此可以说，罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特例，而拉格朗日中值定理就是罗尔中值定理的推广.

由拉格朗日中值定理容易得到下面两个推论.

推论 1　如果函数 $y=f(x)$ 在区间（a，b）内任一点 x 处的导数 $f'(x)$ 都等于零，那么在区间（a，b）内 $f(x)$ 是一个常数.

证　在（a，b）内任取两点 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，则 $f(x)$ 在闭区间［x_1，x_2］上满足拉格朗日中值定理条件，因此必有 $a<x_1<\xi<x_2<b$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_1-x_2)$$

因为在（a，b）内恒有 $f'(x)=0$，故 $f'(\xi)=0$，所以有

$$f(x_2)=f(x_1)$$

由于 x_1、x_2 是（a，b）内任意两点，因此在（a，b）内 $f(x)$ 的函数值处处相等，即在（a，b）内 $f(x)$ 是一个常数.

推论 2　如果函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 在区间（a，b）内的导数处处相等，那么在区间（a，b）内 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只相差一个常数．即

$$f(x)-g(x)=C$$

证　设 $F(x)=f(x)-g(x)$，

因为在区间（a，b）内有

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

由推论 1，在（a，b）内有

$$F(x)=C$$

即

$$f(x)-g(x)=C$$

2.5.2　洛必达法则

定理 2.4　设

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$；

（2）在点 a 的某邻域内（点 a 本身可以除外），$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或为 ∞）；

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）.

当 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为“$\dfrac{0}{0}$”型未定式，如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在时，那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在且等于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$；如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 为无穷大，那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也是无穷大.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$（$b\neq 0$）.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$

注意

上式中的 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}$ 已不是“$\dfrac{0}{0}$”未定式，因此，不能再应用洛必达法则了.

定理 2.5　设

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$；$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；

（2）在点 a 的某邻域内（点 a 本身除外），$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x)\neq0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或为 ∞）.

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）.

当 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$；$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式. 如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在且等于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$；如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 为无穷大，那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也是无穷大.

定理 2.4 和定理 2.5 统称为**洛必达法则**，可以证明，把 $x\to a$ 改为 $x\to a^+$，$x\to a^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 结论仍然成立（证明从略）.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$（$n>0$）.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$

除“$\dfrac{0}{0}$”型和“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型两个未定式外，还有一些未定式，如“$0\cdot\infty$”、“$\infty-\infty$”、“0^0”、“1^∞”、“∞^0”型的未定式，其计算方法式是通过适当的转换，把它们转化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式来进行计算. 下面通过例题来说明.

例 5　求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x$（$n>0$）.

解　这是“$0\cdot\infty$”型未定式. 由于

$$x^n\ln x=\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^n}}$$

当 $x\to 0^+$ 时，上式右端是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，可以考虑应用洛必达法则．于是

$$\lim_{x\to 0^+} x^n\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-x^n}{n}\right)=0$$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$．

解　这是“0^0”型未定式．设 $y=x^x$，则由对数恒等式有

$$y=\mathrm{e}^{\ln x^x}=\mathrm{e}^{x\ln x}$$

因

$$\lim_{x\to 0^+} y=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}$$

应用例 5 的结果（此时 $n=1$），得

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$$

故

$$\lim_{x\to 0^+} x^x=\mathrm{e}^0=1$$

洛必达法则是求未定式极限的一种比较有效的方法，如果与其他求极限的方法结合使用，例如，与恒等变形、等价无穷小替换或重要极限等结合使用，会使运算更加简捷．

例 7　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$．

解　这是“$\dfrac{0}{0}$”型的未定式．如果直接用洛必达法则，那么分母的导数比较复杂．综合使用各种方法，运算就会简捷．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

练习 2.5

利用洛必达法则求下列极限．

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$；　（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$；

（4）$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；　（5）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$；　（6）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\ln x}{x\ln x}$．

2.6　函数的单调性

2.6.1　函数单调性的判别法

如图 2-9 所示，由导数的几何意义不难看出，如果在区间（a，b）内恒有 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$的曲线在 x（$x\in(a$，$b)$）处切线的斜率 $\tan\beta>0$，这时曲线显然是上升的；同样，$f'(x)<0$ 表示曲线在 x（$x\in(a$，$b)$）处切线的斜率 $\tan\beta<0$，这时曲线是下降的．由此得到下面的定理．

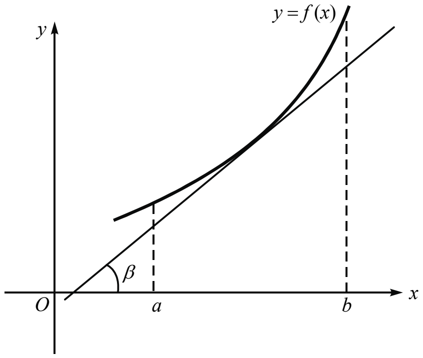


图 2-9

定理 2.6　设函数 $y=f(x)$在（a，b）内可导.

（1）如果在（a，b）内恒有 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$在（a，b）内单调增加；

（2）如果在（a，b）内恒有 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$在（a，b）内单调减少.

证　在（a，b）内任取两点 x_1、x_2（$x_1<x_2$），由已知 $y=f(x)$在（a，b）内可导，故在［x_1，x_2］内也可导，所以应用拉格朗日中值定理，得到

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\qquad (x_1<\xi<x_2)$$

因在（a，b）内导数 $f'(x)>0$，那么必有 $f'(\xi)>0$．由于 $x_2-x_1>0$，于是

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0$$

即

$$f(x_2)>f(x_1)$$

故函数 $y=f(x)$在（a，b）内单调增加.

同理可证，如果在（a，b）内恒有导数 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$在（a，b）内单调减少.

可以证明，将定理中的开区间（a，b）改为闭区间［a，b］或无限区间，结论同样成立.

一般地，$f(x)$在（a，b）内有有限个点 x_i（$i\in\mathbf{N}$），使 $f'(x_i)=0$，而在其余点处均有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则 $f(x)$在（a，b）内仍为单调增加函数（或单调减少函数）.

例 1　判定函数 $y=x+\cos x$ 在区间（0，2π）上的单调性.

解　因为在区间（0，2π）内

$$y'=1-\sin x\geqslant 0$$

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$时，$y'=0$，所以对 $x\in$（0，$\dfrac{\pi}{2}$）∪（$\dfrac{\pi}{2}$，2π）都有 $y'>0$，故函数在（0，$\dfrac{\pi}{2}$）和（$\dfrac{\pi}{2}$，2π）内都分别是单调增加函数，此时可以说函数 $y=x+\cos x$ 在（0，2π）上是单调增加函数.

例 2　讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解　函数 $y=e^x-x-1$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）.

由于 $y'=e^x-1$，故在（$-\infty$，0）内 $y'<0$，所以函数 $y=e^x-x-1$ 在（$-\infty$，0）内单调减少；在（0，$+\infty$）内 $y'>0$，所以函数 $y=e^x-x-1$ 在（0，$+\infty$）内单调增加；在点 $x=0$ 处，$y'|_{x=0}=0$．上

面的讨论可用表 2-3 表示（表中“−”表示导数小于 0，“+”表示导数大于 0；“↗”表示单调增加，“↘”表示单调减少）.

表 2-3

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	−	0	+
y	↘		↗

即函数在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少，在 $(0, +\infty)$ 内单调增加．其中 $x=0$ 是单调减少区间 $(-\infty, 0)$ 和单调增加区间 $(0, +\infty)$ 的分界点，在 $x=0$ 处 $y'=0$.

由例 2 中看出，有些函数在它的定义区间上不是单调的，但是当我们用导数等于零的点来划分函数的定义区间以后，就可以使函数在划分后的各个部分区间上单调．这个结论对于在定义区间上的可导函数都成立．如果函数在某些点处不可导，那么划分函数的定义区间的分点，还应包括这些导数不存在的点．综合上述情形，我们有如下结论：

如果函数在定义区间上连续，除去有限个导数不存在的点外导数存在，那么只要用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间，就能保证 $f'(x)$ 在各个部分区间内保持固定正负号，从而函数 $f(x)$ 在每个部分区间上单调.

例 3　确定函数 $f(x)=36x^5+15x^4-40x^3-7$ 的单调区间.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x)=180x^4+60x^3-120x^2$$
$$=60x^2(x+1)(3x-2)$$

由 $f'(x)=0$ 得　$x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=\dfrac{2}{3}$

它们把 $(-\infty, +\infty)$ 分为四个区间：$(-\infty, -1)$，$(-1, 0)$，$\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$，$\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$，如表 2-4 所示.

表 2-4

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
y'	+	0	−	0	−	0	+
y	↗		↘		↘		↗

从表 2-4 中容易看出，$f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$，$\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ 内单调减少；在区间 $(-\infty, -1)$，$\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ 内单调增加.

例 4　求下列函数的单调区间.

（1）$f(x)=x^3$；　（2）$y=2x^2-\ln x$；　（3）$y=\sqrt[3]{x^2}$.

解　（1）函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$．由于

$$f'(x)=3x^2$$

因此，除了点 $x=0$ 使 $y'=0$ 外，在其余各点处均有 $y'>0$．因此函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty, 0)$

及（0，+∞）上都是单调增加的，从而在整个定义域（−∞，+∞）内是单调增加的．在点 $x=0$ 处曲线有一水平切线，函数的图形如图 2-10 所示．

（2）函数的定义域为（0，+∞）．由于

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$$

由 $y'=0$ 得　　$x_1 = -\frac{1}{2}$（舍），$x_2 = \frac{1}{2}$，列表 2-5．

表 2-5

x	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
y'	−	0	+
y	↘		↗

从表 2-5 中看出，函数在区间（0，$\frac{1}{2}$）内单调减少；在区间（$\frac{1}{2}$，+∞）内单调增加．

（3）函数的定义域为（−∞，+∞），当 $x \neq 0$ 时，导数得

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$$

又当 $x=0$ 时，函数的导数不存在，列表 2-6．

表 2-6

x	（−∞，0）	0	（0，+∞）
y'	−	不存在	+
y	↘		↗

从表 2-6 中看出，函数在（−∞，0）内单调减少，在（0，+∞）内单调增加，如图 2-11 所示．

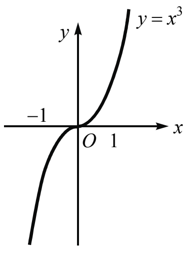


图 2-10

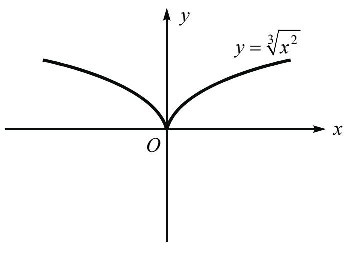


图 2-11

2.6.2　函数的极值及其求法

如果函数在某个区间内可导，且在整个区间内非单调，那么函数由增变为减，或由减变为增的时候，总会出现某一瞬时的相对稳定，在这一瞬时，它的导数应当为零．

如图 2-12 所示，连续函数 $f(x)$在由增变为减的时候，在过渡点ξ_1处的函数值比它邻近的函数值都大，而且在这点有一条水平的切线；相反地，在函数由减变为增时过渡点ξ_2处的函数值 $f(\xi_2)$就比它邻近的函数值都小，而且也有一条水平的切线．

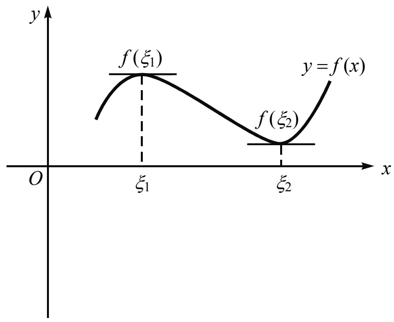


图 2-12

为了确定函数图像的变化状况，除了知道它在哪个区间上升，在哪个区间下降以外，还需要了解它在哪一点实现这种转变的．为此，我们有如下定义：

定义 2.3 设函数 $y=f(x)$在区间（a，b）内有定义，$x_0\in(a，b)$，如果存在点 x_0 的某个邻域，均有 $f(x)<f(x_0)$（或 $f(x)>f(x_0)$）成立，那么，就把 $f(x_0)$称为函数 $f(x)$的一个**极大（或极小）值**，点 x_0 称为 $f(x)$的一个**极大值（或极小值）点**．函数的极大值和极小值统称为函数的**极值**，极大值点和极小值点统称为**极值点**．

注意

函数的极大值和极小值是局部性概念．它只意味着在 x_0 的邻近，即在半径很小的邻域内，各点的函数值的比较相对较大或较小，而不意味它在整个区间内最大或最小．

通过前面例题的函数图像不难看到，那些有水平切线的点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$．即导数为零的点应当与极值点有一定的联系．我们把使得导数为零的点［即方程 $f'(x_0)=0$ 的根］称为函数 $f(x)$的**驻点**．

如果能确定极值点与驻点之间的关系，我们就能应用导数来研究函数的极值问题．现在，我们就来讨论函数取得极值的必要条件和充分条件．可以证明下面两个定理（证明略）．

定理 2.7（必要条件） 设函数 $f(x)$在点 x_0 具有导数，且在 x_0 处取得极值，那么这函数在 x_0 处的导数 $f'(x_0)=0$．

这就是说，可导函数 $f(x)$的极值点必定是它的驻点．但反过来，函数的驻点却不一定是极值点．例如，函数 $f(x)=x^3$ 的导数为 $f'(x)=3x^2$，由于 $f'(0)=0$，因此 $x=0$ 是函数的驻点，但 $x=0$ 却不是该函数的极值点．

值得注意的是，定理 2.7 的条件之一是函数在 x_0 点可导，而导数不存在（但连续）的点也有可能取得极值．例如，函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 有 $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$，显然 $f'(0)$ 不存在，但在 $x=0$ 处却取得极小值 $f(0)=0$（见图 2-11）．因此函数的极值点只能在驻点和导数不存在的点中产生，我们称它们为**可能极值点**．

定理 2.8（充分条件） 设函数 $f(x)$在点 x_0 的邻域内连续且可导（$f'(x_0)$ 可以不存在），当 x 由小增大经过 x_0 点时，如果

（1）$f'(x)$ 由正变负，那么 x_0 是极大值点；

（2）$f'(x)$ 由负变正，那么 x_0 是极小值点；

（3）$f'(x)$ 不改变符号，那么 x_0 不是极值点（证明从略）．

把必要条件和充分条件结合起来，就得到求函数的极值的一般方法，其步骤如下：

（1）求出函数的定义域；

（2）求 $f(x)$的导数 $f'(x)$；

（3）求出 $f(x)$的全部可能极值点；

（4）应用定理 2.8，分别考察每一个可能极值点是否为极值点，是极大点还是极小点（一般需要列表）；

（5）求出各极值点的函数值，即为极值．

例 5　求函数 $f(x)=-x^4+\dfrac{8}{3}x^3-2x^2+2$ 的极值．

解　函数 $f(x)$的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）．

$$f'(x)=-4x^3+8x^2-4x=-4x(x-1)^2$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=1$．

列表 2-7．由表 2-7 知，函数的极大值为 $f(0)=2$．

表 2-7

x	（$-\infty$，0）	0	（0，1）	1	（1，$+\infty$）
$f'(x)$	+	0	−	0	−
$f(x)$	↗	极大值 2	↘	无极值	↘

例 6　求函数 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值．

解　函数 $f(x)$的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），其图像如图 2-13 所示．

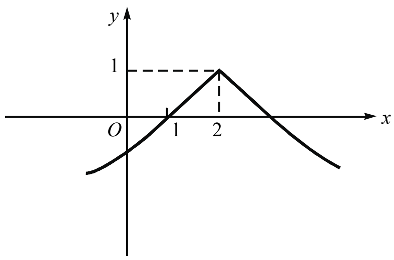


图 2-13

当 $x\neq2$ 时，

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

当 $x=2$ 时，$f'(x)$不存在．

列表 2-8．由表 2-8 知，$x=2$ 为函数的极大值点，函数的极大值 $f(2)=1$．

表 2-8

x	（$-\infty$，2）	2	（2，$+\infty$）
$f'(x)$	+	不存在	−
$f(x)$	↗	极大值 1	↘

还可以根据下面的定理，利用二阶导数来判定点 x_0 是否为函数 $f(x)$的极值点．

定理 2.9 设 x_0 是函数 $f(x)$的驻点，并且函数 $f(x)$在点 x_0 处有二阶导数，

（1）若 $f''(x_0)<0$，则函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极大值；

（2）若 $f''(x_0)>0$，则函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极小值；

（3）若 $f''(x_0)=0$，则不能判断 $f(x)$在点 x_0 处是否取得极值．（证明略）

练习 2.6

1．求下列函数的单调区间．

（1） $y=\arctan x-x$； （2） $y=x^3+x$；

（3） $y=x-\ln(1+x)$； （4） $y=2x^3+9x^2+12x-3$．

2．求下列函数的极值点和极值．

（1） $y=2+x-x^2$； （2） $y=x^2\ln x$．

3．求下列函数在指定区间内的极值．

（1） $f(x)=\sin x+\cos x$ （$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$）； （2） $f(x)=e^x\cos x$ （0，2π）．

2.7 函数的最大值与最小值

在工农业生产、工程技术及科学技术分析中，往往会遇到，在一定条件下，如何提高生产效率，降低成本，节约原材料等实际问题，这类问题一般可归结为求函数的最大值或最小值问题，统称为**最值问题**．

下面，我们就函数的不同情况，分别研究函数的最值的求法．

2.7.1 闭区间［a，b］上的连续函数的最值

设函数 $f(x)$ 为初等函数．由连续函数的性质知，如果 $f(x)$ 在闭区间上连续，那么一定存在最大值和最小值．显然，最值如果在区间内部取得，它是极值点的函数值；如果不在区间内部取得，它是端点的函数值．因此，只要求出函数 $f(x)$ 的所有极值点和端点的函数值，进行比较即可得到函数在该区间上的最值．

由于极值点肯定是可能极值点（驻点或一阶导数不存在的点），所以求极值时，首先求出所有可能极值点的函数值和端点的函数值，然后进行比较即可，而不必判定这些可能极值点是否确为极值点．

例 1 求函数 $f(x)=x^4-2x^2+3$ 在［−2，2］上的最大值和最小值．

解
$$f(x)=x^4-2x^2+3$$
$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

令 $f'(x)=0$，解得
$$x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$$

于是
$$f(0)=3,\ f(\pm1)=2,\ f(\pm2)=11$$

所以，$f(x)$在［−2，2］上的最大值为 $f(\pm2)=11$，最小值为 $f(\pm1)=2$．

最大（或最小）值与极大（或极小）值是不同的．极值是局部性的概念，在一个区间内可能有多个数值不同的极大值或极小值，有的极小值也有可能大于某个极大值．而最大（或最小）值是整体的概念，是所考察的闭区间上全部函数值的最大（或最小）者．函数在［a，b］上取

得最大（或最小）值的点，即最值点可能不只一个，但最大（或最小）值只有一个.

2.7.2　一般区间上的连续函数的最值

如果 $f(x)$ 在一个区间（有限或无限，开或闭）内可导并且只有一个驻点 x_0，那么，当 $f(x_0)$ 是极大值时，$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最大值；当 $f(x_0)$ 是极小值时，$f(x_0)$就是 $f(x)$ 在该区间上的最小值. 分析函数的图形，以上结论不难得到.

例 2　求函数 $y=-x^2+4x-3$ 的最大值.

解　函数的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）.

因为 $y'=-2x+4=-2(x-2)$，$y''=-2$.

令 $y'=0$，得驻点 $x=2$，$f''(2)=-2<0$，故 $x=2$ 是函数的极大值点，极大值为 1.

函数在（$-\infty$，$+\infty$）内只有唯一的一个极值点，所以函数的极大值就是函数的最大值，即函数的最大值点是 $x=2$，最大值 $y|_{x=2}=1$，如图 2-14 所示.

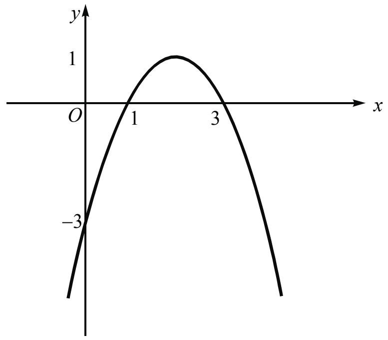


图 2-14

2.7.3　实际问题中的最值

注意

实际问题中，往往根据问题的实际意义就可以断定函数 $f(x)$ 确有最大值或最小值，而且一定在定义区间内部取得，这时如果实际问题的函数在定义区间内部只有一个驻点 x_0，那么，就可断定 $f(x_0)$ 是所求的最大值或最小值.

例 3　生产 q 个单位某种产品时的成本函数为

$$C(q)=5q+200$$

收入函数为

$$R(q)=10q-0.01q^2$$

问每批生产多少个单位，才能使利润最大？

解　利润函数为

$$\begin{aligned} L(q)=R(q)-C(q)&=10q-0.01q^2-5q-200 \\ &=-0.01q^2+5q-200 \end{aligned}$$

其定义域为 $[0，+\infty)$.

$$L'(q)=-0.02q+5$$

令 $L'(q)=0$，得　$q=250$

由于函数在定义区间内只有唯一的驻点，而由实际问题知道利润存在最大值，因此该驻点就是最大值点，即每批生产 250 个单位时利润最大.

例 4 欲用长 6 m 的铝合金料加工一日字形窗框，如图 2-15 所示. 问它的长和宽分别为多少时，才能使窗户面积最大？最大面积是多少？

解 设窗框的宽为 x，则长为 $\frac{1}{2}(6-3x)$. 窗户的面积为

$$y = x\cdot\frac{1}{2}(6-3x) = 3x - \frac{3}{2}x^2 \quad (0<x<6)$$

$$y' = 3 - 3x$$

令 $y'=0$，求得驻点 $x=1$，当 $x=1$ 时，$y=\frac{3}{2}$.

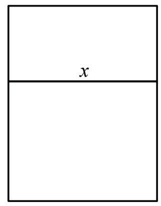


图 2-15

由于函数在定义区间内只有唯一的驻点，而由实际问题知道面积的最大值存在，因此驻点就是最大值点，即窗户的宽为 1m，长为 $\frac{3}{2}$ m 时，窗户的面积最大. 最大的面积为 $y(1)=\frac{3}{2}$ m^2.

练习 2.7

1．求下列函数的最大值、最小值.

（1）$y=x+\sqrt{1-x}$ $[-3, 1]$； （2）$y=\frac{x}{x^2+1}$ $[0, +\infty)$.

2．某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？最大面积是多少？

2.8 函数图像的描绘

2.8.1 曲线的凹凸性及拐点

现在我们来直观地考察函数图像的上升（或下降）的弯曲情况. 如图 2-16 所示，函数的图像在区间内始终是上升的（有时是下降的），但却有不同的弯曲状况. 可以看到，在 C 点左边，曲线上的每一点都位于该点切线的下方；但在 C 点的右边曲线上的每一点都位于该点切线的上方.

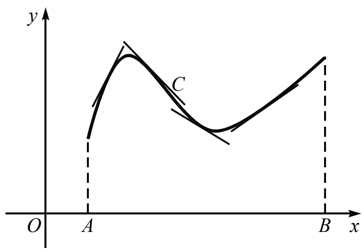


图 2-16

定义 2.4 如果在某区间内的曲线位于其任一点切线的上方，那么此曲线称为在该区间内是凹的，该区间为曲线的凹区间；如果在某区间内的曲线位于其任一点切线的下方，那么此曲线称为在该区间内是凸的，该区间为曲线的凸区间.

从图 2-16 上容易看出，曲线 $f(x)$ 在某区间是凹的，其实质是它的切线的斜率就随着 x 的增加而增加，即在该区间 $f'(x)$ 是增函数，因而 $f''(x)\geqslant 0$.

这样我们就可以利用函数二阶导数的符号，来判断函数图像是凸的还是凹的.

定理 2.10　设函数 $f(x)$ 在（a，b）内具有二阶导数.

（1）若在（a，b）内，$f''(x)>0$，则函数 $f(x)$ 的图像在（a，b）内是凹的；

（2）若在（a，b）内，$f''(x)<0$，则函数 $f(x)$ 的图像在（a，b）内是凸的.

例如，曲线 $y=\ln x$，因为 $y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$，所以在函数 $y=\ln x$ 在定义域（0，$+\infty$）内，$y''<0$，由曲线凹凸的判定定理可知，曲线 $y=\ln x$ 是凸的.

例 1　判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解　$y=x^3$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），因 $y'=3x^2$，$y''=6x$，

故当 $x<0$ 时，$y''<0$，所以曲线在（$-\infty$，0）内为凸的；当 $x>0$ 时，$y''>0$，所以曲线在（0，$+\infty$）内为凹的.

如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 的左右两侧，一侧是凸（凹）的，一侧是凹（凸）的，我们就把点（x_0，$f(x_0)$）称为函数 $f(x)$的图像的**拐点**．拐点是凹弧与凸弧的分界点．在例 1 中，点（0，0）是曲线 $y=x^3$ 的拐点.

由于拐点是凹弧与凸弧的分界点，故在拐点的左、右两侧 $f''(x)$ 必然异号，因而在拐点处必有 $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在.

于是，我们归纳出求函数图像拐点的一般步骤：

（1）求 $f''(x)$；

（2）令 $f''(x)=0$，解出全部实根，并求出所有二阶导数不存在的点；

（3）对步骤（2）求出的每一个点，观察左、右两侧的二阶导数的符号，如果异号则该点为曲线的拐点；如果同号则该点不是曲线的拐点.

例 2　求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹、凸区间.

解　函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），

$$y'=12x^3-12x^2$$

$$y''=36x^2-24x=36x\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

解方程　$y''=0$，得　$x_1=0$，$x_2=\dfrac{2}{3}$.

列表 2-9 来讨论曲线的凹、凸区间和拐点（用∪代表凹曲线，∩代表凸曲线）.

表 2-9

x	（$-\infty$，0）	0	（0，$\frac{2}{3}$）	$\frac{2}{3}$	（$\frac{2}{3}$，$+\infty$）
y''	+	0	−	0	+
y	∪	拐点（0，1）	∩	拐点（$\frac{2}{3}$，$\frac{11}{27}$）	∪

从表中可以看出，（$-\infty$，0）、（$\dfrac{2}{3}$，$+\infty$）是凹区间；（0，$\dfrac{2}{3}$）是凸区间．点（0，1）和点（$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{11}{27}$）分别是曲线的两个拐点，如图 2-17 所示.

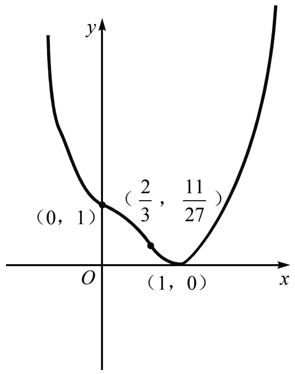


图 2-17

例 3 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解 函数在（$-\infty$，$+\infty$）内连续，当 $x\neq 0$ 时

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\quad y''=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

当 x=0 时，y'、y'' 都不存在．列表 2-10.

表 2-10

x	（$-\infty$，0）	0	（0，$+\infty$）
y''	+	0	−
y	$\cup$	拐点（0，0）	$\cap$

从表中看出，点（0，0）是曲线的一个拐点.

2.8.2 曲线的渐近线

我们知道双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上的点，沿双曲线远离原点时，会无限逼近 x 轴或 y 轴，如图 2-18 所示，x 轴或 y 轴就是双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的两条渐近线.

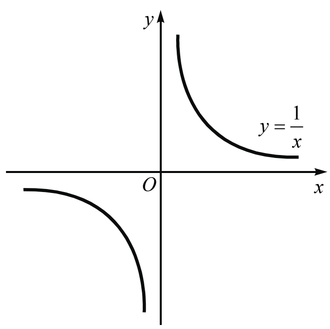


图 2-18

定义 2.5 如果曲线上的一点沿着曲线无限远离原点时，该点无限逼近某条直线，则称此直线为曲线的渐近线.

曲线的渐近线分为水平渐近线、铅直渐近线和斜渐近线三种．本书只介绍前两种渐近线的求法．

1．水平渐近线

设曲线 $y=f(x)$，当 $x\to\infty$（或 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$）时，如果函数 $f(x)$ 以常量 c 为极限，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=c$$

那么直线 $y=c$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线．

2．铅直渐近线

设曲线 $y=f(x)$，当 $x\to x_0$（有时仅当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$）时，如果函数 $f(x)$ 为无穷大，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

那么直线 $x=x_0$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线．

例 4　求下列曲线的水平渐近线或铅直渐近线．

（1）$y=\dfrac{1}{x-4}$；　　（2）$y=\dfrac{3x^2+2}{1-x^2}$．

解　（1）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-4}=0$，所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线．

又因为 4 是 $y=\dfrac{1}{x-4}$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4}=\infty$，所以 $x=4$ 是曲线的铅直渐近线．

（2）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{1-x^2}=-3$，所以 $y=-3$ 是曲线的水平渐近线．又因为 1 和−1 是 $y=\dfrac{3x^2+2}{1-x^2}$ 的间断点，且

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2}{1-x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2}{1-x^2}=\infty$$

所以 $x=1$ 和 $x=-1$ 是曲线的铅直渐近线．

*2.8.3　描绘函数图像的步骤

我们已经掌握了求函数的单调区间、极值点、凹凸区间、驻点、拐点及渐近线的方法，综合使用这些方法，就能简捷且较准确地作出函数的图像．

描绘函数图像的一般步骤如下：

（1）确定函数 $y=f(x)$ 的定义域，并求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

（2）求出方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在函数定义域内的全部实根，用这些实根把函数的定义域划分成若干个区间（导数不存在的点也要作为分点）；

（3）确定在各区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数图形的单调性和凹凸性，极值点和拐点；

（4）确定函数图像是否有水平渐近线或铅直渐近线；

（5）描绘出极值点、拐点、渐近线．为了把图形描得准确些，有时还需要补充一些点．用

圆滑曲线连接这些点便可描绘出函数 $y=f(x)$的图像.

例 5　描绘函数 $y=3x^2-x^3$ 的图像.

解　函数 $y=3x^2-x^3$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）.

$$y'=6x-3x^2=3x(2-x),\quad y''=6-6x=6(1-x)$$

令 $y'=0$ 得　　　　　　　$x=0$，$x=2$

令 $y''=0$ 得　　　　　　　$x=1$

列表 2-11.

表 2-11

x	$(-\infty, 0)$	0	(0，1)	1	(1，2)	2	$(2, +\infty)$
y'	−	0	+		+	0	−
y''	+	+	+	0	−	−	−
y	□ ∪	极小值 $y(0)=0$	□ ∪	拐点 (1，2)	□ ∩	极大值 $y(2)=4$	□ ∩

曲线不存在渐近线.

为了使图像更精确，再补充（3，0），（−1，4）等点，然后根据表中各区间的变化情况，画出函数的图像，如图 2-19 所示.

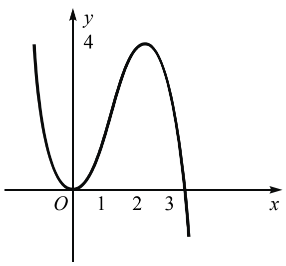


图 2-19

例 6　描绘函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图像.

解　函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$$

方程 $f'(x)=0$ 的根为 $x=0$；方程 $f''(x)=0$，得到 $x=\pm 1$.

用点 $x=-1$，$x=0$，$x=1$ 把区间（$-\infty$，$+\infty$）划分成四个区间，列表 2-12.

表 2-12

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
y	□ ∪	拐点 $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$	□ ∩	极大值 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$	□ ∩	拐点 $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$	□ ∪

函数的极大值 $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.4$，拐点为 $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ 和 $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$，分别近似为（−1，0.2），（1，0.2）.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，所以图形有一条水平渐近线 y=0. 补充点（2，0.05）和（−2，0.05）. 描绘出函数的图像，如图 2-20 所示.

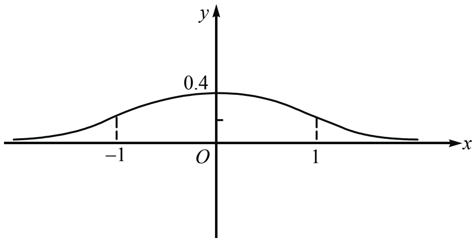


图 2-20

本题还可以利用函数的奇偶性作图. 因为已知函数是偶函数，它的图形关于 y 轴对称. 所以只需讨论函数在［0，+∞］上的图像，再利用图形的对称性，便可得到函数在整个定义域内的图像.

练习 2.8

1．判定下列函数的凹凸性.

（1）$y=4x-x^2$；　　（2）$y=x+\frac{1}{x}$（$x>0$）.

2．求下列函数图形的凹凸区间和拐点.

（1）$y=x^3-5x^2+3x+5$；　　（2）$y=xe^{-x}$.

3．问 a 及 b 为何值时，点（1，3）为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

4*．作出下列函数的图像.

（1）$y=x^3-x^2-x+1$；　　（2）$y=x-\ln(1+x)$.

*2.9　曲率

在实际问题中，有时不但需要研究曲线弯曲的特性，还要考虑曲线的弯曲程度．例如，设计铁路的铁轨，船体结构中的钢梁，机床的转轴等，它们在荷载作用下要产生弯曲变形，

在设计时对它们的弯曲必须有一定的限制，这就要定量地研究它们的弯曲程度．在数学上我们用曲率来表示曲线的弯曲程度．在研究曲线的曲率之前，先介绍曲线的弧长及弧长的微分（简称弧微分）．

2.9.1 弧微分

设函数$f(x)$在区间（a，b）内具有连续导数．在曲线$y=f(x)$上取固定点M_0（x_0，y_0）作为度量弧长的基点，如图2-21所示，规定x增大的方向作为曲线的正向，设M（x，y）是曲线上任一点，s表示曲线弧$\overset{\frown}{M_0M}$的长度．

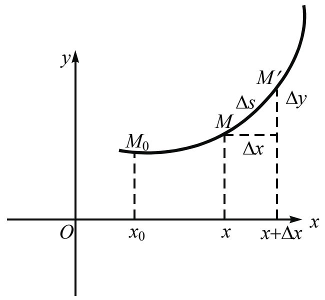


图 2-21

显然，弧长s是随着$M(x,y)$的确定而确定的，也就是说，s是x的函数：记为$s=s(x)$．显然函数$s(x)$是单调增加函数．由于一般情况下，知道函数$y=f(x)$，而不知道函数$s=s(x)$，所以要通过适当的变换，将ds用函数$y=f(x)$的导数来表示．

设x、$x+\Delta x$为（a，b）内两个邻近的点，它们在曲线$y=f(x)$上的对应点为M、M'，并设对应于x的增量Δx，弧s的增量为Δs（见图2-21），那么

$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} \approx \pm\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}$$

因为
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$$

因此得
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{1+y'^2}$$

由于函数$s=s(x)$是单调增加函数，从而根号前应取正号，于是

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad (2.17)$$

式（2.17）就是**弧微分公式**．

2.9.2 曲率及其计算公式

有了弧微分的概念，就可以用数量来描述曲线的弯曲程度．

在图2-22中我们看到，弧$\overset{\frown}{M_1M_2}$段比较平直，当动点沿着弧段由M_1移动到M_2时，切线转过的角度（简称转角）$\Delta\alpha_1$不大，而弧段$\overset{\frown}{M_2M_3}$弯曲的程度较大，转角$\Delta\alpha_2$就比较大．但是，转角的大小还不能完全反映弯曲的程度．例如，在图2-23中我们看到，两段曲线弧$\overset{\frown}{M_1M_2}$及N_1N_2尽管它们的转角$\Delta\alpha$相同，然而弯曲程度并不相同，短弧段比长弧段弯曲的程度大．由此可见，曲线弧的弯曲程度还与弧段的长度有关．

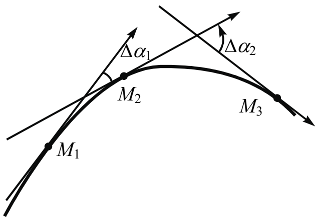


图 2-22

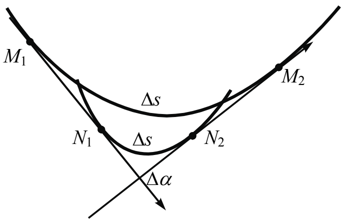


图 2-23

由此，我们引入描述曲线弯曲程度的曲率概念.

设曲线 C 是光滑的，在曲线 C 上选定一点 M_0 作为度量弧 s 的基点. 设曲线上点 M 对应于弧 s，切线的倾角为 α，曲线上另外一点 M' 对应于弧 $s+\Delta s$，切线的倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$，如图 2-24 所示. 那么，弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 的长度为 Δs，当动点从 M 移动到 M' 时切线转过的角度为 $\Delta\alpha$.

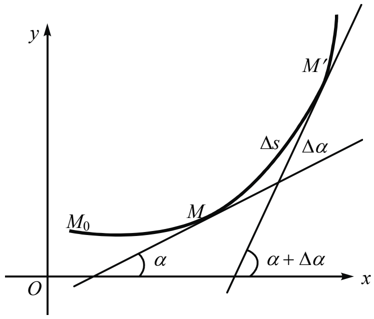


图 2-24

我们用比值 $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$，即单位弧段上切线转角的大小来表达弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 的平均弯曲程度，把这比值称为弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 的平均曲率，并记做

$$\bar{\kappa}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

曲线上各点附近的弯曲程度不一定处处相同，所以弧的平均曲率一般只能表示整段弧的平均弯曲程度. 显然，当弧愈短时，平均曲率就愈能近似地表示弧上某一点附近的弯曲程度.

定义 2.6　当 $\Delta s\to 0$ 时（即 $M'\to M$ 时），$\overset{\frown}{MM'}$ 的平均曲率的极限称为曲线 C 在点 M 处的**曲率**，记做 κ，即

$$\kappa=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

在 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ 存在的条件下，κ 也可以表示为

$$\kappa=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \tag{2.18}$$

对于直线来说，切线与直线本身重合，当点沿直线移动时，切线的倾角 α 不变，如图 2-25 所示，$\Delta\alpha=0$，$\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=0$，从而 $\kappa=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=0$. 这就是说，直线上任一点 M 处的曲率都等于 0，这与我们直觉认识到的“直线不弯曲”一致.

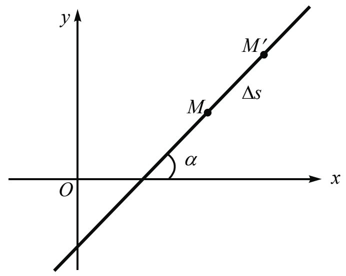


图 2-25

例 1　已知圆的半径为 R，求

（1）圆上任一段的平均曲率；

（2）圆上任一点的曲率.

解（1）如图 2-26 所示，在圆上任意取一段弧 $\overset{\frown}{MM'}$，由平面几何定理知道，在点 M、M' 处圆的切线所夹的角 $\Delta\alpha$ 等于中心角 $\angle MDM'$ 但 $\angle MDM'=\dfrac{\Delta s}{R}$，于是

$$\bar{\kappa}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{\dfrac{\Delta s}{R}}{\Delta s}=\frac{1}{R}$$

（2）圆上任一点的曲率：

$$\kappa=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{R}=\frac{1}{R}$$

上述结论表示，圆上各点处的曲率都等于半径 R 的倒数 $\dfrac{1}{R}$. 这就是说，圆的弯曲程度到处都一样，且半径越小曲率越大，圆弧弯曲越厉害.

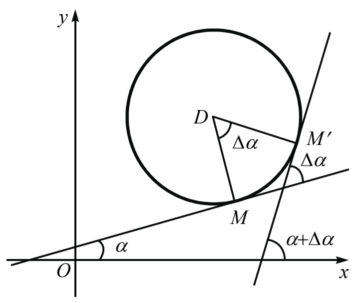


图 2-26

现在我们来推导一般曲线在任一点的曲率的计算公式.

设曲线的方程是 $y=f(x)$，并且 $f(x)$具有二阶导数. 因为

$$\tan\alpha=y'$$

两边对 x 求导，注意到α是 x 的函数，得

$$\sec^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=y''，\quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\frac{y''}{1+y'^2}$$

于是

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

由于 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$．从而，根据曲率 κ 的定义有

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

由于曲线一般只考虑弯曲程度的大小，所以约定曲率 κ 只取正值．由此得到曲率的计算公式为

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.19}$$

由这个公式可知，在使函数 $y=f(x)$的二阶导数等于零的点处，曲率等于 0．所以直线上每点处的曲率都是零；曲线上的拐点处的曲率也为零．

例 2　求等轴双曲线 $xy=1$ 在点（1，1）处的曲率．

解　因为 $y=\frac{1}{x}$，所以

$$y' = -\frac{1}{x^2}，\quad y'' = \frac{2}{x^3}$$

因此，

$$y'|_{x=1} = -1，\quad y''|_{x=1} = 2$$

把它们代入公式，得到曲线 $xy=1$ 在点（1，1）处的曲率为

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 3　抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点处的曲率最大？

解　由　$y=ax^2+bx+c$，得

$$y' = 2ax+b，\quad y'' = 2a$$

代入公式（2.19）得，

$$\kappa = \frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

κ 的分子是常数，所以只要分母最小，κ 就最大．显然当 $2ax+b=0$，即 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，分母最小，此时 κ 的值最大，且由于当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，代入 $y=ax^2+bx+c$ 得

$$y = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

所以抛物线在点 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 处曲率最大，这一点正是抛物线的顶点，因此抛物线在顶点处的曲率最大．

在例 1 中我们已经知道，圆周上每一点的曲率是常数，而且等于它的半径的倒数．对于一般的曲线，它在各点的曲率一般互不相同．但在研究曲线某点的曲率时，往往可以用一个圆弧来代替该点附近的曲线．对于这样的圆弧所在的圆称为曲率圆．

定义 2.7 如果一个圆满足下列三个条件：

（1）在点 M 处与曲线有公切线；

（2）与曲线在点 M 附近有相同的凹凸方向；

（3）与曲线在点 M 处有相同的**曲率**.

那么这个圆就称为曲线在点 M 的**曲率圆**．曲率圆的中心 C，称为曲线在点 M 的**曲率中心**；曲率圆的半径 R，称为曲线在点 M 的**曲率半径**，如图 2-27 所示.

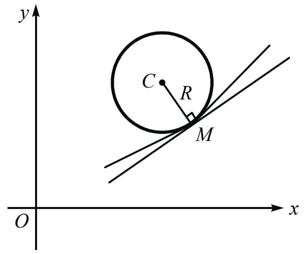


图 2-27

由定义可知，曲率中心必位于曲线在点 M 的法线上，并且在曲线的凹向的一侧.

如果曲线在点 M 的曲率用 κ 表示，那么在该点曲率圆的曲率也是 κ . 由例 1 中知 $\kappa=\dfrac{1}{R}$，所以，曲率半径 R 就是 $R=\dfrac{1}{\kappa}$．将曲率的计算公式（2.19）代入上式得

$$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \tag{2.20}$$

这就是曲线在给定点处的曲率半径的计算公式.

例 4 设工件内表面的截线为抛物线 $y=0.4x^2$，如图 2-28 所示，现在要用砂轮磨削其内表面．问用直径多大的砂轮才比较合适？

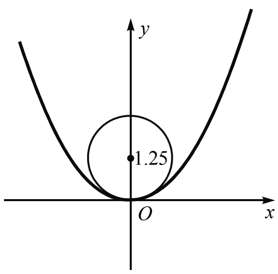


图 2-28

解 为了在磨削时不使与砂轮接触处附近的那部分工件被磨去太多，砂轮的半径应小于或等于抛物线上各点处曲率半径中的最小值．由例 3 知道，抛物线在其顶点处的曲率最大，也就是说，抛物线在其顶点处的曲率半径最小．因此，我们先来求出抛物线 $y=0.4x^2$ 在顶点 O（0，0）处的曲率．由

$$y'=0.8x\text{，}\quad y''=0.8$$

而有

$$y'|_{x=0}=0\text{，}\quad y''|_{x=0}=0.8$$

把它们代入公式（2.19）得

$$\kappa = 0.8$$

因而求得抛物线顶点处的曲率半径

$$R = \frac{1}{\kappa} = 1.25$$

所以用砂轮磨削一般工件的内表面时，也有类似的结论，即选用的砂轮的半径不应超过此工件内表面的界限上各点处曲率半径中的最小值.

由曲率的计算公式和初等函数的连续性可知，如果函数的一阶导数和二阶导数都连续，那么曲率也连续，但是在两条曲线的衔接处，曲率一般不连续．例如，圆和它的切线在切点处曲率不连续．行驶在曲率不连续点的物体，就会产生一个冲动．因此需要用一段缓和曲线来进行衔接，通常选用立方抛物线.

当 $|y'|$ 比 1 小得多时，$(1+y')^{\frac{3}{2}} \approx 1$．因此，在工程技术中，经常使用近似公式：

$$\kappa = y''$$

练习 2.9

1．求下列各曲线的弧微分.

（1）$y = x^3 - x$；　（2）$y = \mathrm{e}^x$；　（3）$y = \sin x + \cos x$.

2．求下列各曲线在各给定点的曲率.

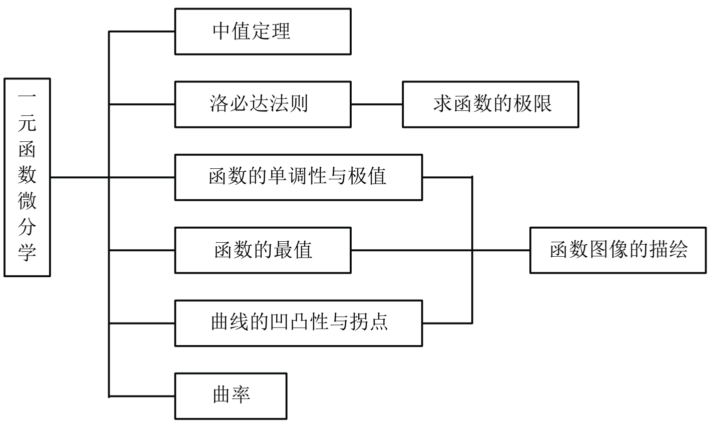
（1）$y = x^3$，点（1，1）;　（2）$y = x\cos x$，点（0，0）.

3．求下列各曲线在给定点的曲率和曲率半径：

（1）$y = \mathrm{e}^x$，点（0，1）;　（2）$y = \sin^4 x - \cos^4 x$，点（0，−1）.

4．求曲线 $y = \sin x$ 在区间（0，π）内曲率最大的点.

本章知识结构图



数学史话 3

牛顿与莱布尼茨

牛顿与莱布尼茨都是他们所处时代的巨人．就微积分创立而言，尽管在背景、方法和形式上存在差异、各有特色，但二者的功绩是相当的，他们都使微积分成为能普遍使用的算法，同时又都将面积、体积及相当的问题归结为反切线（微分）运算．应该说，微积分能成为独立的科学并给整个自然科学带来革命性的影响，主要是靠了牛顿与莱布尼茨的工作．在科学史上，重大的真理往往在条件成熟的一定时期由不同的探索者相互独立地发现，微积分的创立，情形也是如此．

我们知道，牛顿在 1687 年以前没有公开发表过任何微积分的文章，而莱布尼茨则在 1684 和 1686 年分别发表了微积分的论文．1687 年当牛顿在《原理》中首次发布他的流数方法时，他在前言中作了这样一段说明：

“十年前，我在给学问渊博的数学家莱布尼茨的信中曾指出：我发现了一种方法，可用以求极大值、极小值、作切线以及解决其他类似的问题，而且这种方法也适用于无理数，…… ．这位名人回信说他也发现了类似的方法，并把他的方法给我看了．他的方法与我的大同小异，除了用语、符号、算式和量的产生方式外，没有实质性区别．”

这可以说是对微积分发明权问题的客观评述，遗憾的是，它在《原理》第 3 版时被删去了，原因是其间牛顿与莱布尼茨之间发生了优先权问题的争执．

争端是由局外人挑起的．瑞士数学家德丢勒（N.F.deDuillier）1699 年在一本小册子中提出“牛顿是微积分的第一发明人”，而莱布尼茨作为“第二发明人”，“曾从牛顿那里有所借鉴”．莱布尼茨立即对此作了反驳．1712 年，英国皇家学会专门指定了一个委员会进行调查，并于翌年公布了一份著名的《通报》，宣布“确认牛顿为第一发明人”．这引起了莱布尼茨的申诉，争论在双方的追随者之间越演越烈，直到莱布尼茨和牛顿都去世以后，才逐渐平息并得到解决．经过调查，特别是对莱布尼茨手稿的分析，证实两人确实是相互独立地完成了微积分的发明．就发明时间而言，牛顿早于莱布尼茨；就发表时间而言，莱布尼茨则先于牛顿．

值得补充的是，尽管发生了纠纷，两位学者却从未怀疑过对方的科学才能．有一则记载说，1701 年在柏林王宫的一次宴会上，当普鲁士王问到对牛顿的评价时，莱布尼茨回答道：“纵观有史以来的全部数学，牛顿做了一多半的工作．”

优先权争论被认为是“科学史上最不幸的一章”．微积分发明权的争论，对整个 18 世纪英国与欧陆国家在数学发展上的分道扬镳，产生了严重影响．虽然牛顿在微积分应用方面的辉煌成就极大地促进了科学的进步，但由于英国数学家固守牛顿的传统而使自己人逐渐远离分析的主流．分析的进步在 18 世纪主要是由欧陆国家的数学家在发展莱布尼茨微积分方法的基础上而取得的．

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

第 3 章　一元函数积分学

本章将学习一元函数积分学及其应用，包括定积分、不定积分、广义积分的概念与计算，微积分基本公式，定积分的应用等.

3.1　定积分

3.1.1　定积分问题举例——求曲边梯形的面积

在工农业生产和科研中，经常会遇到计算平面图形面积的问题，如果图形是矩形、三角形、圆、平行四边形、梯形，那么利用学过的知识，这些图形的面积可以解决. 但是如果是图 3-1 中阴影部分图形的面积，又将如何来求呢？

图 3-1 中阴影部分图形是由连续曲线 $y=f(x)$（$f(x)\geqslant 0$），直线 $x=a$ 和 $x=b$（$a<b$）以及 x 轴围成的，这样的图形称为曲边梯形，其中曲线弧称为曲边.

下面讨论如何求曲边梯形的面积 A.

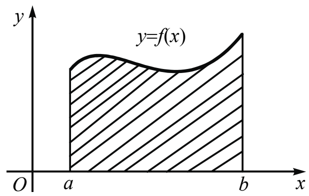


图 3-1

我们知道矩形的高是不变的，计算矩形面积的公式为：矩形面积=底×高. 而曲边梯形有一条边是曲线，其高是变化的，所以不能用矩形面积公式来计算其面积. 这个问题用极限的方法能够得到解决.

用分点把区间［a，b］分成很多个小区间，然后过每个分点作 x 轴的垂线，就把曲边梯形分成很多个小曲边梯形；对应于每个小曲边梯形作一个小矩形，如图 3-2 所示，由于 $f(x)$ 在区间［a，b］上是连续变化的，在很小的一段区间上它的变化很小，近似于不变. 因此每个小曲边梯形的面积可以用相应的小矩形面积来近似代替，如果我们把所有小矩形面积加起来，那么所有小矩形面积之和就是曲边梯形面积 A 的近似值.

而且从图 3-3 可以看出，区间［a，b］分得越细，也就是每个小区间的长度越小，那么所有小矩形面积之和就越接近曲边梯形面积 A. 可以想象，如果把区间［a，b］无限细分，使每个小区间的长度都无限趋向于零，这时所有小矩形面积之和的极限就是曲边梯形面积 A.

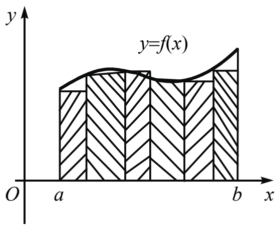


图 3-2

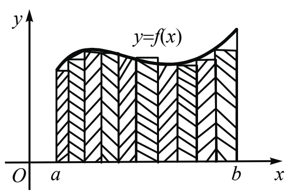


图 3-3

上述过程可归纳叙述如下：

（1）分割．用分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

将区间［a，b］分成 n 个小区间： ［x_0， x_1]，［x_1， x_2］，…，［x_{n-1}，x_n]，

它们的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$（$i$=1，2，…，$n$），如图 3-4 所示．

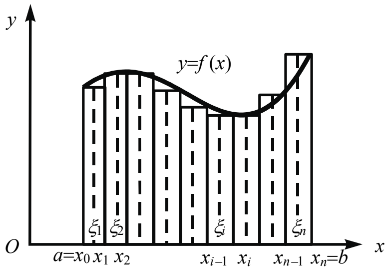


图 3-4

过每个分点作 x 轴的垂线，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，小曲边梯形面积依次记为 ΔA_i（i=1，2，…，n）．

（2）近似代替．在每个小区间［x_{i-1}， x_i］内任取一点 ξ_i（i=1，2，…，n），以 Δx_i 为底、$f(\xi_i)$ 为高作小矩形，其面积为 $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$，并近似代替相应的小曲边梯形面积 ΔA_i，即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

（3）求和．把 n 个小矩形面积相加就得到曲边梯形面积 A 的近似值，即

$$A \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{3.1}$$

（4）取极限．用 λ 表示所有小区间长度的最大值，即 $\lambda = \max\{\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \cdots,\ \Delta x_n\}$，则当 $\lambda \to 0$ 时（此时区间［a，b］无限细分，即分点数 $n \to \infty$），上面（3.1）式右端和式的极限就是曲边梯形面积 A，即

$$A = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

3.1.2 定积分的定义

从上面的具体问题可以看到：通过分割，近似代替，求和将求曲边梯形面积问题归结为求“和式的极限”．在科学技术中还有许多实际问题也可归结为这种特定和式的极限．下面我们舍弃这些问题的具体含义，抽象出解决这类问题的一般思想，就得到下述定积分的定义．

定义 3.1 设函数 $y = f(x)$ 在区间［a，b］上连续，任取分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将$[a, b]$分成 n 个小区间：$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$，小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$（$i$=1，2，…，$n$），在每个小区间［$x_{i-1}$，$x_i$］上任取一点 ξ_i（$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$），作乘积 $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$（i=1，2，…，n），并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，记 $\lambda = \max\{\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \cdots,\ \Delta x_n\}$，如果不论对［$a$，$b$］采取何种分法，也不论在小区间［$x_{i-1}$，$x_i$］上点 ξ_i 怎样取法，只要当 $\lambda \to 0$ 时，和式

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 总有确定的极限，那么此极限称为函数 $f(x)$ 在区间［a，b］上的定积分，记做 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{3.2}$$

此时也称为定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在或 $f(x)$ 在［a，b］上可积（否则，称为定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在或 $f(x)$ 在［a，b］上不可积）.

上面（3.2）式中的符号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，a，b 分别称为积分下限和积分上限，区间［a，b］称为积分区间.

由定积分定义知：曲边梯形面积 A 等于曲边 $f(x)$ 在区间［a，b］上的定积分，即

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

关于定积分定义的几点说明：

（1）因为定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限，所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一个常数，它只与被积函数 $f(x)$ 和积分区间［a，b］有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

（2）定积分定义是在积分限 $a<b$ 情况下给出的，对 $a=b$，$a>b$ 的情况，补充如下规定：

当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$；当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

（3）由定积分定义可知，并不是所有函数都可积．函数 $f(x)$ 在区间［a，b］上可积的充分条件是：如果 $f(x)$ 在区间［a，b］上连续或有界且只有有限个间断点，那么 $f(x)$ 在［a，b］上可积.

3.1.3　定积分的几何意义

由定积分定义可得：如果在区间［a，b］上连续函数 $f(x)\geqslant 0$，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积（见图 3-1），即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$$

如果在区间［a，b］上连续函数 $f(x)\leqslant 0$，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积的相反数，如图 3-5 所示，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$$

如果在区间［a，b］上连续函数 $f(x)$ 有时为正有时为负，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的各部分图形面积的代数和，如图 3-6 所示，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$$

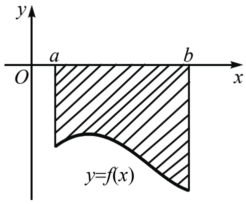


图 3-5

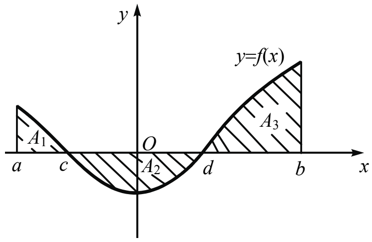


图 3-6

练习 3.1

1．试用定积分表示下列曲边梯形的面积.

（1）由曲线 $y=e^x$ 和直线 $x=1$，$x=3$，x 轴所围成;

（2）由曲线 $y=\ln x$ 和直线 $x=e$， x 轴所围成.

2．利用定积分的几何意义，求出下列定积分的值.

（1）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

3.2　定积分的性质和微积分的基本公式

3.2.1　定积分的性质

为了便于定积分的计算，我们介绍定积分的性质，下列各性质中积分上下限的大小，若未加特殊声明，均不加限制；并且假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

性质 1　被积函数中的常数因子可以移到积分号外面，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\quad（k 为常数）$$

性质 2　两个函数和（差）的定积分等于它们各自定积分的和（差），即

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

性质 2 对于任意有限个函数的和（差）也是成立的.

性质 3（定积分的可加性）如图 3-7（a）所示，如果 $a<c<b$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

注　对于 a，b，c 三点任何其他相对位置，性质 3 仍成立．例如，当 $a<b<c$ 时，如图 3-7（b）所示，从几何上直观看到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

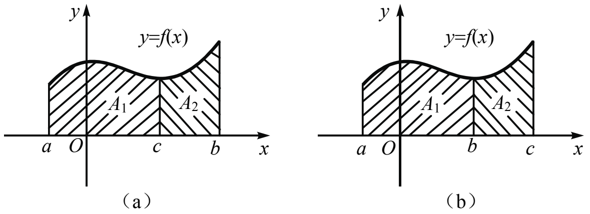


图 3-7

性质 4　如果在区间［a，b］上函数 $f(x)\equiv 1$，那么 $\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

如图 3-8 所示，$f(x)=1$ 与 $x=a$，$x=b$，x 轴所围图形为一矩形，它的面积 $A=1\times(b-a)=b-a$，即 $\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

性质 5（积分中值定理）　如果函数 $f(x)$ 在区间［a，b］上连续，那么在此区间上至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

性质 5 的几何意义是：对于以区间［a，b］为底，曲线 $y=f(x)$（$f(x)\geqslant 0$）为曲边的曲边梯形，至少有一个以 $f(\xi)$（$a\leqslant\xi\leqslant b$）为高，［a，b］为底的矩形，使得它们的面积相等，如图 3-9 所示.

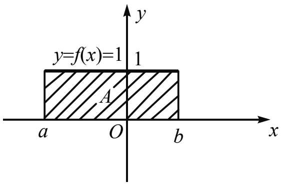


图 3-8

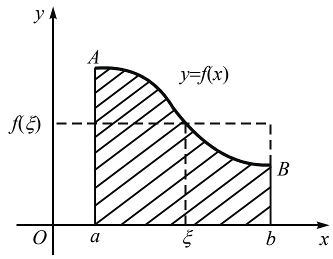


图 3-9

3.2.2　微积分的基本公式

利用定积分的定义计算定积分是十分困难的，为此，必须寻求计算定积分的新方法. 下面将研究如何用原函数来计算定积分.

1. 积分上限的函数

如图 3-10 所示，设函数 $f(x)$ 在区间［a，b］上连续，x 为［a，b］上的任意一点. 因为 $f(x)$ 在部分区间［a，x］上连续，所以 $f(x)$ 在区间［a，x］上的定积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 存在且为图 3-10 中阴影部分图形的面积.

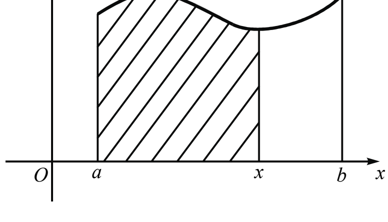


图 3-10

需要指出的是，在定积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 中，x 既表示定积分的上限，又表示积分变量. 因为定积分与积分变量用什么字母表示无关，所以为便于区分，把积分变量改用其他字母，如 t，于是 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 改写为

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

在式（3.3）中令上限 x 在区间［a，b］上变动，则对于每一个取定的 x 值，定积分式（3.3）都有一个确定的数值与之对应存在，所以定积分式（3.3）在区间［a，b］上定义了一个新函数，称为**积分上限的函数**，记做 $\Phi(x)$，即

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad （a\leqslant x\leqslant b）$$

关于积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 有下面的重要定理：

定理 3.1（原函数存在定理） 若函数 $f(x)$ 在区间［a，b］上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 在区间［a，b］上的一个原函数，即

$$\Phi'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x) \qquad （a\leqslant x\leqslant b）$$

定理 3.1 的重要意义是：一方面肯定了连续函数的原函数是存在的，同时，也揭示了微分（导数）与定积分这两个定义不相干的概念之间的内在联系，另一方面，还初步揭示了定积分与原函数之间的联系，因而称为微积分基本定理．因此，我们就有可能通过原函数来计算定积分．

原函数存在定理告诉我们，求积分上限函数 $\Phi(x)$ 关于上限 x 的导数，只要将被积函数中的积分变量直接换为上限即可．

例 1 已知 $\Phi(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$，求 $\Phi'(x)$．

解 $\Phi'(x)=\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t\right)'=\mathrm{e}^{-x}\sin x$

2．微积分的基本公式

设某物体从某定点开始作变速直线运动，在 t 时刻所经过的路程为 $s=s(t)$，其速度为 $v=v(t)=s'(t)$．则在时间间隔［T_1，T_2］内物体所经过的路程 s 为 $s(T_2)-s(T_1)$．

另外，用求曲边梯形面积的方法可求得该物体在［T_1，T_2］内所经过的路程为速度 $v(t)$ 在［T_1，T_2］上的定积分 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$．

于是
$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t=s(T_2)-s(T_1) \tag{3.4}$$

上式表明，速度函数 $v(t)$ 在区间［T_1，T_2］上的定积分等于 $v(t)$ 的一个原函数 $s(t)$ 在区间［T_1，T_2］上的增量．

将（3.4）式的结果应用到一般的函数，得到用原函数计算定积分的公式如下：

定理 3.2 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

为方便起见，记 $F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$，因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{3.5}$$

上式称为微积分基本公式，也称为牛顿—莱布尼茨公式．该公式进一步揭示了定积分与被积函数的原函数之间的联系，即一个连续函数在区间［a，b］上的定积分等于它的任一个原函数在区间［a，b］上的增量．这就为定积分的计算找到了一个简便的方法．

例 2　计算 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解　因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的原函数．

故由牛顿—莱布尼茨公式，得

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$$

例 3　计算 $\int_{-1}^2 2^x\mathrm{d}x$.

解　因为 $(\frac{1}{\ln 2}2^x)' = 2^x$，所以 $\frac{1}{\ln 2}2^x$ 是 2^x 的原函数．

故由牛顿—莱布尼茨公式，得

$$\int_{-1}^2 2^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}2^x\Big|_{-1}^2 = \frac{1}{\ln 2}(2^2 - 2^{-1}) = \frac{7}{2\ln 2}$$

通过上面两个例子可知，计算定积分的关键是求出被积分函数的原函数，下一节就开始来研究求被积分函数原函数的方法——求不定积分．

练习 3.2

1．求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x \ln(1-t^3)\mathrm{d}t$.

2．计算下列定积分．

（1）$\int_1^3 x^3\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\int_{-1}^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

3．求曲线 $y=\sin x$（$0 \leqslant x \leqslant \pi$）和 x 轴围成的面积．

3.3　不定积分

3.3.1　不定积分的概念

由于常数的导数为零，因此当 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数时，则 $F(x)+C$（C 为任意常数）也是 $f(x)$ 的原函数，这就是说，如果 $f(x)$ 有一个原函数，那么它就有无穷多个原函数 $F(x)+C$（C 为任意常数）.

反之，$F(x)+C$（C 为任意常数）是否包含了 $f(x)$ 的所有原函数呢？回答是肯定的．事实上，设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，因为

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

所以，由在一个区间上导数恒为零的函数必为常数，可知

$$\Phi(x) - F(x) = C_0 \text{（} C_0 \text{为某个常数）}$$

即
$$\Phi(x)=F(x)+C_0$$

上式说明 $f(x)$ 的任一原函数都可用 $F(x)+C$ 表示.

因此，表达式 $F(x)+C$ 就可表示 $f(x)$ 的全体原函数，由此得到了不定积分的定义.

定义 3.2 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$（C 为任意常数）称为 $f(x)$ 的不定积分，记做 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即
$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$
式中的 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积分表达式，x 称为积分变量，C 称为积分常数.

由定义知求 $f(x)$ 的不定积分，只要求出被积函数 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，再加上任意常数 C 即可.

例 1 求 $\int x^3\mathrm{d}x$.

解 因为 $(\frac{1}{4}x^4)'=x^3$，所以 $\frac{1}{4}x^4$ 是 x^3 的原函数.

故
$$\int x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+C$$

例 2 求 $\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 因为 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，所以 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的原函数.

故
$$\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$$

例 3 求 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 当 $x>0$ 时，因为 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在（0，$+\infty$）内的原函数.

因此在（0，$+\infty$）内 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$

当 $x<0$ 时，因为 $[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$

所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在（$-\infty$，0）内的原函数.

因此在（$-\infty$，0）内 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C$

把在 $x>0$ 及 $x<0$ 内的结果合起来，可写做
$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$$

3.3.2 基本积分表

由于求不定积分是求导（或微分）的逆运算，所以由导数基本公式就可以得到不定积分

的基本公式，下面把这些公式列成一个表，叫做基本积分表．

基本积分表

$F'(x)=f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$
（1）$(C)'=0$	$\int 0\mathrm{d}x=C$
（2）$\left(\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$（$\alpha\neq-1$） 特别 $(x)'=1$	$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}+C$（$\alpha\neq-1$） 特别 $\int 1\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C$
（3）$(\ln\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x}$	$\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$
（4）$\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)'=a^x$	$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
（5）$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$
（6）$(\sin x)'=\cos x$	$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
（7）$(-\cos x)'=\sin x$	$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
（8）$(\tan x)'=\sec^2 x$	$\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$
（9）$(-\cot x)'=\csc^2 x$	$\int\csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$
（10）$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$
（11）$(-\csc x)'=\csc x\cot x$	$\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$
（12）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$
（13）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$\int\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$

以上基本积分公式是求不定积分的基础，必须熟记．

注　基本积分公式与积分变量用什么字母表示无关，例如公式（6）：

$$\int\cos u\mathrm{d}u=\sin u+C\,,\quad \int\cos t\mathrm{d}t=\sin t+C$$

例 4　求下列不定积分．

（1）$\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\int\sqrt{x}\mathrm{d}x$．

解　（1）$\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int x^{-2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-x^{-1}+C=-\dfrac{1}{x}+C$

（2）$\int\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

3.3.3　不定积分的性质

性质 1　$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$ 或 $\int\mathrm{d}f(x)=f(x)+C$

先积分，后求导（或求微分），没有常数 C；而先求导（或求微分）后积分，有常数 C．

性质 2　$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为非零常数）．

性质 3 $\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

性质 3 对于任意有限个函数的和（差）也是成立的.

例 5 求 $\int(2x^5+3\sin x-10^x)dx$.

解
$$\begin{aligned}\int(2x^5+3\sin x-10^x)dx&=\int 2x^5dx+\int 3\sin x dx-\int 10^x dx\\&=2\int x^5dx+3\int\sin x dx-\int 10^x dx\\&=2\cdot\frac{1}{6}x^6+3(-\cos x)-\frac{10^x}{\ln 10}+C\\&=\frac{1}{3}x^6-3\cos x-\frac{10^x}{\ln 10}+C\end{aligned}$$

注意

虽然每一项积分后都有一个积分常数，但由于任意常数之和还是任意常数，所以作为结果只写一个任意常数 C；要检查积分结果是否正确，只要对结果求导，看它的导数是否等于被积函数，相等时结果是正确的，否则结果是错误的. 以例 5 的结果为例，因为

$$\left(\frac{1}{3}x^6-3\cos x-\frac{10^x}{\ln 10}+C\right)'=\frac{1}{3}\cdot 6x^5-3\cdot(-\sin x)-\frac{10^x\ln 10}{\ln 10}=2x^5+3\sin x-10^x$$

所以积分结果是正确的.

练习 3.3

1．求下列不定积分.

（1）$\int\frac{1}{x^3}dx$；（2）$\int\sqrt[7]{x^2}dx$；

（3）$\int\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}dx$；（4）$\int(4\sqrt[3]{x}-3e^x)dx$；

（5）$\int\left(\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}+4\right)dx$；（6）$\int(4\sin x-3\cos x+3^x)dx$；

（7）$\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$；（8）$\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

2．验证下列等式是否成立（C 为常数）.

（1）$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}+C$；（2）$\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

3．验证函数 $F(x)=x(\ln x-1)$ 是 $f(x)=\ln x$ 的一个原函数.

3.4 求不定积分的常用方法

当被积函数较复杂时，往往需要采取将被积函数变形等方法，以便利用基本积分表等求出不定积分，下面介绍几种常用的积分方法.

3.4.1　直接积分法

求不定积分时，有时需将被积函数适当地恒等变形，然后利用不定积分的性质和基本积分公式求出结果，这种求积分的方法称为**直接积分法**.

例 1　求 $\int \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{4-4x+x^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int (4x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x = 8\sqrt{x} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

例 2　求 $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{(x^4-1)+2}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int (\frac{x^4-1}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1})\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int (x^2-1)\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + 2\arctan x + C\end{aligned}$$

例 3　求 $\int 3^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

解　$\int 3^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int (3\mathrm{e})^x \mathrm{d}x = \frac{(3\mathrm{e})^x}{\ln(3\mathrm{e})} + C = \frac{3^x \mathrm{e}^x}{\ln 3 + 1} + C$

3.4.2　换元积分法

1．第一换元积分法（凑微分法）

可以用直接积分法所求的不定积分是有限的，例如：

$$\int \cos 5x\mathrm{d}x，\int \sqrt{x+1}\mathrm{d}x，\int \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x$$

等，用直接积分法就解决不了，如果把积分变量 x 适当变换一下，就可以利用基本积分表中的某些公式求解.

这种解法对于很多复合函数的积分都适用．一般地，有下面的定理：

定理 3.3　设 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$，如果函数 $u = \varphi(x)$ 可导，那么 $F[\varphi(x)]$ 是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数，于是

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal[u=\varphi(x)]{\text{换元}} \int f(u)\mathrm{d}u \xlongequal{\text{积分}} F(u) + C \xlongequal[u=\varphi(x)]{\text{回代}} F[\varphi(x)] + C \qquad (3.6)$$

公式（3.6）称为不定积分的第一换元积分公式，应用第一换元积分公式求不定积分的方法称为第一换元积分法.

例 4　求 $\int (2x-1)^{99}\mathrm{d}x$.

解　被积函数 $(2x-1)^{99}$ 是 x 的复合函数，令　$u = 2x-1$，则

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}(2x-1) = 2\mathrm{d}x，\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$$

因此
$$\int(2x-1)^{99}\mathrm{d}x=\int u^{99}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int u^{99}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}u^{100}+C=\frac{1}{200}(2x-1)^{100}+C$$

例 5 求 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解 被积函数中 e^{x^2} 是 x 的复合函数，令 $u=x^2$，则
$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x^2=2x\mathrm{d}x，\quad x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$$
因此
$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^u\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^u+C=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$$

当我们变量代换比较熟悉后，设中间变量 u 的过程可以省略，直接求不定积分，简化计算.

例 5 也可写做
$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{x^2}\cdot x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$$

例 6 求 $\int\frac{1}{3+4x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1}{3+4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{3+4x}\mathrm{d}(4x)=\frac{1}{4}\int\frac{1}{3+4x}\mathrm{d}(4x+3)=\frac{1}{4}\ln|3+4x|+C$

在例 5、例 6 的解法中，没有写出变量代换 $u=\varphi(x)$，也没有计算出 $\mathrm{d}u$，而是在认定被积函数中的哪部分是新的积分变量 $\varphi(x)$ 后，通过凑微分，将被积函数中的一部分与 $\mathrm{d}x$ 凑为 $\mathrm{d}\varphi(x)$，然后直接利用基本积分公式求积分．因此第一换元积分法也称为**凑微分法**.

由于凑微分法不需要写出换元过程，自然也就没有还原过程，因此可以简化书写过程. 用凑微分法求不定积分时经常用到如下凑微分公式（a，b 均为常数且 $a\neq0$）:

（1）$\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax)=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$.

（2）$x^a\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}\mathrm{d}x^{a+1}$（$a\neq-1$），

特别地，$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$，$x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}x^3$，$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$，$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\frac{1}{x})$.

（3）$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$.

（4）$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$.

（5）$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$.

（6）$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$.

（7）$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$.

（8）$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$.

例 7 求 $\int\frac{1}{x}\sin\ln x\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1}{x}\sin\ln x\mathrm{d}x=\int(\sin\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int\sin\ln x\mathrm{d}\ln x=-\cos\ln x+C$

例 8　求$\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx$．

解　$\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx = \int \frac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x dx = \int \frac{1}{1+(e^x)^2}de^x = \arctan e^x + C$

需要说明的是，同一积分由于选择不同的解法，可以导致其积分结果在形式上不同，但是这些不同结果之间仅相差一个常数．例如，求$\int \sin x\cos x dx$：

解法一　$\int \sin x\cos x dx = \int \sin x d\sin x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

解法二　$\int \sin x\cos x dx = -\int \cos x d\cos x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$

因为$\frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos^2 x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{2}\sin^2 x$与$-\frac{1}{2}\cos^2 x$相差一个常数．

2．第二换元积分法

第一换元法是通过选择新积分变量u，用$u=\varphi(x)$进行换元，从而求出原不定积分．但是，对于有些积分，如$\int \frac{1}{\sqrt{x}-4}dx$，$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$（$a>0$）等，被积函数中含有根式，无法凑微分．那么如何求解呢？

一般来说，对于某些含有根式的积分$\int f(x)dx$，可以做适当的变量代换$x=\varphi(t)$，去掉根式，并把原积分化为$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$的形式且使其能够求出，当然在求出原函数后，还要将$t=\varphi^{-1}(x)$代回，还原成$x$的函数，这就是第二换元积分法求不定积分的基本思想．

定理 3.4　设函数$f(x)$连续，函数$x=\varphi(t)$单调、可导，且$\varphi'(t)\neq 0$，如果$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t)+C$，那么

$$\int f(x)dx \xlongequal[x=\varphi(t)]{\text{换元}} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t)+C \xlongequal[t=\varphi^{-1}(x)]{\text{回代}} F[\varphi^{-1}(x)]+C \qquad (3.7)$$

公式（3.7）称为不定积分的第二换元积分公式，应用第二换元积分公式求不定积分的方法称为第二换元积分法．

例 9　求$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}dx$．

解　令$t=\sqrt{x+1}$，则$x=t^2-1$，$dx=2tdt$．

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}dx &= \int \frac{t}{t-1}2tdt = 2\int \frac{t^2}{t-1}dt = 2\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt \\ &= 2\int (t+1+\frac{1}{t-1})dt = 2\left[\int tdt + \int dt + \int \frac{1}{t-1}d(t-1)\right] \\ &= 2\left[\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right]+C \\ &= t^2+2t+2\ln|t-1|+C \\ &= x+1+2\sqrt{x+1}+2\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C\end{aligned}$$

下面几个积分以后经常会遇到，所以将它们补充到基本积分表中去：

（14）$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；（15）$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

（16）$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；（17）$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

（18）$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$；（19）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$；

（20）$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$．

例 10 求$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$．

解 $\int \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+2x+1+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\mathrm{d}(x+1)$

利用公式（18），得$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

3.4.3 分部积分法

前面讲的例 5 求$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$，我们可以用换元积分法求出结果，但是对于从表面上看比它简单的积分$\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$，则无法用换元积分法求出结果，这是因为被积函数中没有复合函数．再如$\int x\cos x\mathrm{d}x$、$\int x^4\ln x\mathrm{d}x$等，换元积分法也无能为力．另外，在电子、通信技术等工程领域，对锯齿形脉冲函数进行分析，常常遇到与$\int x\cos nx\mathrm{d}x$、$\int x\sin nx\mathrm{d}x$有关的积分．因此，再介绍一种新的积分法——分部积分法，此方法常用于被积函数是两种不同类型函数乘积的形式．

设函数$u = u(x)$, $v = v(x)$具有连续导数，由两个函数乘积的求导法则，得

$$(uv)' = u'v + uv'$$

移项，得

$$uv' = (uv)' - u'v$$

对上式等式两边求不定积分，得

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

公式（3.8）称为不定积分的分部积分公式，应用分部积分公式求不定积分的方法称为分部积分法．公式（3.8）的作用是：如果求$\int uv'\mathrm{d}x$很困难，而求$\int u'v\mathrm{d}x$比较容易，那么我们可先求出$\int u'v\mathrm{d}x$，然后利用分部积分公式（3.8）就可求出$\int uv'\mathrm{d}x$．

为简便，公式（3.8）也可写为

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \tag{3.9}$$

例 11 求$\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$．

解 利用分部积分法，就要确定被积表达式中的哪部分为u，哪部分为$\mathrm{d}v$．

如果令 $u = x$，$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，

那么 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$，$v = \mathrm{e}^x$．

于是由分部积分公式，得

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$$

求此积分时，如果令 $u = \mathrm{e}^x$，$\mathrm{d}v = x\mathrm{d}x$

那么 $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，$v = \dfrac{1}{2}x^2$

于是 $$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(\frac{1}{2}x^2) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

显然上式最右端的积分 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 比原积分 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 更不容易求出．由此可见，使用分部积分法的关键在于恰当地选取 u 和 $\mathrm{d}v$，若选取不当，反而使运算更加复杂．

例 12　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解　令 $u = x$，$\mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x$，则　$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$，$v = \sin x$.

于是 $$\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

分部积分法运用比较熟练后，可不必再写出被积表达式中的哪部分为 u，哪部分为 $\mathrm{d}v$. 只要把被积表达式凑成 $u\,\mathrm{d}v$ 的形式，就可直接使用分部积分公式.

例 13　求 $\int x^4\ln x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x^4\ln x\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\int \ln x\mathrm{d}x^5 = \frac{1}{5}(x^5\ln x - \int x^5\mathrm{d}\ln x)\\ &= \frac{1}{5}(x^5\ln x - \int x^5 \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x) = \frac{1}{5}(x^5\ln x - \int x^4\mathrm{d}x)\\ &= \frac{1}{5}(x^5\ln x - \frac{1}{5}x^5) + C\end{aligned}$$

例 14　求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= \int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2 = x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \cdot 2x\mathrm{d}x\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x) = x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) + C\\ &= \mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + C\end{aligned}$$

利用分部积分法时，根据常用函数微分的特点，可以总结出选择 u 的方法：“按照反、对、幂、三、指（即分别为反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数）排列的顺序，哪个函数排在前面就选为 u.”例如，求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$，被积函数为幂函数与反三角函数的乘积，因为在“方法”中反三角函数排在幂函数的前面，所以应选择反三角函数为 u.

3.4.4　积分表及其使用

上面学习了求不定积分的三种方法，发现积分运算要比求导运算复杂. 人们为了使用方便，将常用函数的不定积分编汇成表，称为积分表，见附录 A．积分表按被积函数的类型分组排列，求积分时我们可以根据被积函数的类型直接或经过适当的变形后，在表内查得所需的结果.

例 15　求 $\int \dfrac{1}{4 + 3\sin x}\mathrm{d}x$.

解　被积函数中含有三角函数，在附录 A 的积分表（十一）中查得关于 $\int \dfrac{1}{a + b\sin x}\mathrm{d}x$ 的公式有两个，因为 $a = 4$，$b = 3$，$a^2 > b^2$，所以选用公式 103，得

$$\int \frac{1}{4+3\sin x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{4\tan\frac{x}{2}+3}{\sqrt{7}}+C$$

例 16 求$\int \frac{x^2}{6+7x^2}\mathrm{d}x$.

解 在附录A的积分表（四）中查得公式25与所求积分类型一样，因为$a=6$，$b=7$，所以

$$\int \frac{x^2}{6+7x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{7}-\frac{6}{7}\int \frac{1}{6+7x^2}\mathrm{d}x$$

再由公式22，有

$$\int \frac{x^2}{6+7x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{7}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{42}}\arctan\sqrt{\frac{7}{6}}x\right)+C = \frac{x}{7}-\frac{\sqrt{6}}{7\sqrt{7}}\arctan\sqrt{\frac{7}{6}}x+C$$

需要说明的是，不是所有的积分都需要查表，如$\int \sin^4 x\cos x\mathrm{d}x$只要凑成$\int \sin^4 x\mathrm{d}\sin x$，即可很快解出，因此还是需要掌握不定积分的几种基本积分方法.

练习 3.4

1．求下列不定积分.

（1）$\int \frac{x^2-\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$；（2）$\int x^3(\sqrt[3]{x}+1)\mathrm{d}x$；

（3）$\int (1+\sqrt{x})^2\mathrm{d}x$；（4）$\int \frac{3\cdot 4^x-3^x}{4^x}\mathrm{d}x$；

（5）$\int \frac{2+x^2+x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$；（6）$\int \frac{2-\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

2．求下列不定积分.

（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}}$；（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-5)^5}$；

（3）$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+1}$；（4）$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（5）$\int x^2\sin x^3\mathrm{d}x$；（6）$\int \cot x\mathrm{d}x$；

（7）$\int \frac{1}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x$；（8）$\int \sin^2 x\mathrm{d}x$.

3．求下列不定积分.

（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}$；（2）$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\mathrm{d}x$.

4．求下列不定积分.

（1）$\int \ln x\mathrm{d}x$；（2）$\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$；

（3）$\int x\sin 2x\mathrm{d}x$；（4）$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$；

（5）$\int \arccos x\mathrm{d}x$；（6）$\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

5．查表求下列不定积分.

（1）$\int e^{2x}\cos x\mathrm{d}x$；　（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+9x^2}$；

（3）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x)}$；　（4）$\int \sqrt{3x^2+2}\mathrm{d}x$.

3.5 定积分的计算

前面我们介绍了定积分通过牛顿—莱布尼茨公式与原函数（不定积分）建立了联系，同时也知道牛顿—莱布尼茨公式为定积分的计算提供了一个有效而简便的方法.

3.5.1 直接应用牛顿—莱布尼茨公式计算定积分

例 1　计算$\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　$\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_{-3}^{-1}=\ln|-1|-\ln|-3|=\ln 1-\ln 3=-\ln 3$

例 2　计算$\int_1^4\sqrt{x}\,(x+\frac{2}{x})\mathrm{d}x$.

解

$$\int_1^4\sqrt{x}\,(x+\frac{2}{x})\mathrm{d}x=\int_1^4 (x^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+2\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^4+2\cdot 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4=\frac{2}{5}(4^{\frac{5}{2}}-1^{\frac{5}{2}})+4(4^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}})=16\frac{2}{5}$$

例 3　计算$\int_2^6|x-4|\mathrm{d}x$.

解　因为积分区间为［2，6］，所以$|x-4|=\begin{cases}4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4;\\ x-4, & 4<x\leqslant 6.\end{cases}$

故

$$\int_2^6|x-4|\mathrm{d}x=\int_2^4(4-x)\mathrm{d}x+\int_4^6(x-4)\mathrm{d}x$$

$$=(4x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_2^4+(\frac{1}{2}x^2-4x)\Big|_4^6$$

$$=(4\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 4^2)-(4\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 2^2)+(\frac{1}{2}\cdot 6^2-4\cdot 6)-(\frac{1}{2}\cdot 4^2-4\cdot 4)$$

$$=4$$

例 4　汽车从开始刹车到停车所用的时间为 4s，刹车后t时刻的速度为$v(t)=20-5t$（m/s）. 问从开始刹车到停车，汽车走了多少距离？

解　从开始刹车到停车汽车走的距离为

$$s=\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^4(20-5t)\mathrm{d}t=\int_0^4 20\mathrm{d}t-\int_0^4 5t\mathrm{d}t$$

$$=20\int_0^4\mathrm{d}t-5\int_0^4 t\mathrm{d}t=20t\Big|_0^4-\frac{5}{2}t^2\Big|_0^4=40\text{（m）}$$

即从开始刹车到停车汽车走的距离为 40 m.

3.5.2 定积分的换元积分法

用换元法计算定积分时，令变量代换 $x=\varphi(t)$，由于引入了新的积分变量，因此，必须根据引入的变量代换，相应地变换积分上、下限．即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\substack{x=a\text{ 时 }t=\alpha\\ x=b\text{ 时 }t=\beta}]{\text{令 }x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{3.10}$$

其中 $x=\varphi(t)$ 在区间［α，β］上是单值函数且有连续导数．公式（3.10）称为**定积分的换元积分公式**，应用定积分换元积分公式求定积分的方法称为**定积分换元积分法.**

例 5 计算 $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=2\sin t$，则 $\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$.

并且当 $x=\sqrt{2}$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$；当 $x=2$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$.

因此

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^2\cos^2 t}{(2\sin t)^2}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\sin^2 t}-1)\mathrm{d}t$$

$$=(-\cot t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=(-0-\frac{\pi}{2})-(-1-\frac{\pi}{4})=1-\frac{\pi}{4}$$

例 6 计算 $\int_1^3 \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x$.

解 令 $t=1+x^3$，则 $\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$，于是 $x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$.

并且当 $x=1$ 时，$t=2$；当 $x=3$ 时，$t=28$.

因此 $\int_1^3 \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_2^{28}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\ln|t|\Big|_2^{28}=\frac{1}{3}(\ln 28-\ln 2)=\frac{1}{3}\ln 14$.

上例如果利用凑微分法计算定积分可以更方便些，即不明显地写出新的积分变量 t，那么积分的上、下限就不变，解法如下：

$$\int_1^3 \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{1}{1+x^3}\cdot x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_1^3\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|\Big|_1^3=\frac{1}{3}(\ln 28-\ln 2)=\frac{1}{3}\ln 14$$

例 7 计算 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\ln x=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{2}{3}(1-0)=\frac{2}{3}$

例 8 设函数 $f(x)$ 在区间［$-a$，a］上连续，证明：

（1）如果 $f(x)$ 为奇函数时，那么 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$

（2）如果 $f(x)$ 为偶函数时，那么 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

证　由定积分可加性，有　$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

对 $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 做变换，$x = -t$，则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$，并且当 $x = -a$ 时 $t = a$; $x = 0$ 时 $t = 0$. 于是

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) = -\int_{0}^{a} f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$$

所以
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]\mathrm{d}x$$

（1）如果 $f(x)$ 为奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$，那么 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

（2）如果 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x) = f(x)$，那么 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

利用例 8 的结论，可以简化奇（偶）函数在关于原点对称的区间 $[-a, a]$ 上的定积分的计算.

例 9　计算 $\int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1+x^6}\mathrm{d}x$.

解　因为被积函数 $f(x) = \frac{x\cos x}{1+x^6}$ 是奇函数，积分区间 $[-1, 1]$ 关于原点对称，

所以
$$\int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1+x^6}\mathrm{d}x = 0$$

例 10　计算 $\int_{-2}^{2} (2 + x^2 - 7x^3)\mathrm{d}x$.

解
$$\int_{-2}^{2} (2 + x^2 - 7x^3)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (2 + x^2)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} 7x^3\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} (2 + x^2)\mathrm{d}x + 0$$
$$= 2\left(2x + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{2} = 13\frac{1}{3}$$

3.5.3　定积分的分部积分法

设函数 $u = u(x)$，$v = v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续导数，则 $(uv)' = u'v + uv'$，分别求等式两端在 $[a, b]$ 上的定积分，得 $\int_{a}^{b} (uv)'\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} u'v\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} uv'\mathrm{d}x$. 因为 $\int_{a}^{b} (uv)'\mathrm{d}x = uv\big|_{a}^{b}$，所以

$$\int_{a}^{b} uv'\mathrm{d}x = uv\big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'v\mathrm{d}x \qquad (3.11)$$

或
$$\int_{a}^{b} u\mathrm{d}v = uv\big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\mathrm{d}u \qquad (3.12)$$

上面的公式（3.11）或（3.12）称为**定积分的分部积分公式**，应用定积分分部积分公式求定积分的方法称为**定积分的分部积分法**. 公式中 u 和 $\mathrm{d}v$ 的选取，与不定积分的分部积分法选取方法相同.

例 11　计算$\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} x\mathrm{d}\cos x = -(x\cos x\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x)$$
$$= -[\pi(-1) - 0 - \sin x\big|_0^{\pi}] = \pi + (0-0) = \pi$$

例 12　计算$\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2}(x\mathrm{e}^{2x}\big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x)$$
$$= \frac{1}{2}[\mathrm{e}^2 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(2x)] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 - 1) = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 + 1)$$

3.5.4　利用计算器计算定积分

同计算函数在点 x_0 处的导数一样，利用计算器可以简捷方便地计算定积分．仍然以 CASIO fx－991ES 型计算器为例，介绍利用计算器计算函数 $y = f(x)$ 在区间［a，b］上的定积分的方法.

计算器设有积分键$\boxed{\int_{\square}^{\square}\square}$，按该键显示$\boxed{\int_{\square}^{\square}\square\mathrm{d}x}$. 依次输入被积函数、积分上限和被积函数，按键$\boxed{=}$即可得到定积分的值.

例 13　利用计算器计算$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x$.

解　在普通计算模式（COMP）下，按键$\boxed{\int_{\square}^{\square}\square}$. 输入积分下限$\boxed{\frac{\pi}{3}}$，输入积分上限$\boxed{\frac{\pi}{2}}$，依次按键 $\boxed{\text{ALPHA}}\to\boxed{x}\to\boxed{\sin}\to\boxed{\text{ALPHA}}\to\boxed{x}\to\boxed{\;)\;}$. 按键$\boxed{=}$即可得到定积分的值 0.015 865 921 54.

练习 3.5

1．求下列定积分.

（1）$\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2, & 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

（3）$\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x$；　（4）$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\mathrm{d}x$.

2．求下列定积分.

（1）$\int_1^4 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos x\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　（4）$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+2}\mathrm{d}x$.

3．求下列定积分.

（1）$\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$；

（3）$\int_1^{\mathrm{e}} x^3\ln x\mathrm{d}x$.

3.6　广义积分

前面讨论的定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$要求积分区间［a，b］是有限区间，且被积函数$f(x)$在积分区间上连续，但在实际问题中，还会遇到积分区间为无限区间或被积函数在积分区间上是无界函数的积分，这样就需要对定积分的概念进行推广，从而形成了“广义积分”的概念.

3.6.1　无穷区间上的广义积分

引例 1　如图 3-11（a）所示，求由曲线$y=\dfrac{1}{x^2}$，直线$x=1$及x轴所围开口平面图形的面积S .

解　因为这个图形的右侧是开口的，所以积分区间是无穷区间［1，$+\infty$），因此不能直接用前面所学的定积分来求其面积.

为了求其面积，任取实数$b>1$，如图 3-11（b）所示，则由曲线$y=\dfrac{1}{x^2}$，直线$x=1$，$x=b$及x轴所围成的曲边梯形面积为

$$A=\int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\bigg|_1^b=-(\frac{1}{b}-1)=1-\frac{1}{b}$$

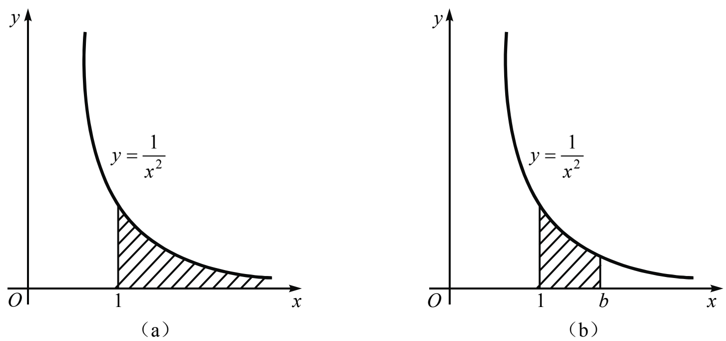


图 3-11

通过上面的分析可看出，当b的值越来越大时，曲边梯形面积A越来越接近开口平面图形的面积S . 因此，当$b\to+\infty$时，曲边梯形面积A的极限就是开口平面图形的面积S，即

$$S=\lim_{b\to+\infty}A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}(1-\frac{1}{b})=1$$

我们把上式中积分A的极限称为$y=\dfrac{1}{x^2}$在［1，$+\infty$）上的广义积分，记做$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$，即

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

下面给出无穷区间上的广义积分定义：

定义 3.3 设函数 $f(x)$ 在区间［a，$+\infty$）上连续，取 $b>a$，如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，那么此极限称为 $f(x)$ 在区间［a，$+\infty$）上的广义积分，记做 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

此时也称为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛．如果上述极限不存在，那么称为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

类似地，设函数 $f(x)$ 在（$-\infty$，b］上连续，定义 $f(x)$ 在区间（$-\infty$，b］上的广义积分为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad（a<b）$$

如果上式中的极限存在，那么称为 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则，称为 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

设函数 $f(x)$ 在（$-\infty$，$+\infty$）上连续，定义 $f(x)$ 在区间（$-\infty$，$+\infty$）上的广义积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

如果上式等号右端的两个广义积分都收敛，那么称为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则，称为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

例 1 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$．

解
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b$$
$$=\lim_{b\to+\infty}(\arctan b-0)=\frac{\pi}{2}$$

注意

为了书写简便，可把记号 $+\infty$ 或 $-\infty$ 看做一个“数”，直接利用牛顿－莱布尼茨公式计算，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数．如上例也可这样计算：

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\arctan 0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

例 2 判断 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 的敛散性．

解 因为 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x=\ln\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\ln x-\ln\ln\mathrm{e}=+\infty$，所以该广义积分发散．

例 3　计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x-\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$

3.6.2　无界函数的广义积分

引例 2　判断积分$\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$是定积分吗？

解　因为$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$，所以被积函数$f(x)=\frac{1}{x}$在积分区间［0，1］上不连续，参见图 1-10，故积分$\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$不是定积分.

那么积分$\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$是什么积分呢？它是无界函数$f(x)=\frac{1}{x}$在区间（0，1］上的广义积分.

下面给出无界函数的广义积分定义：

定义 3.4　设函数$f(x)$在区间（a，b］上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$，取$t>a$，如果极限$\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$存在，那么此极限称为$f(x)$在区间（$a$，$b$］上的广义积分，仍然记做$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

此时也称为广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；如果上述极限不存在，那么称为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

类似地，设函数$f(x)$在区间［a，b）上连续，且$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$，定义$f(x)$在区间［$a$，$b$）上的广义积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\quad(t<b)$$

如果上式中的极限存在，那么称为广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；否则，称为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

设函数$f(x)$在区间［a，b］上除了点c（$a<c<b$）外连续，且$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，定义$f(x)$在区间［$a$，$b$］上的广义积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果上式等号右端的两个广义积分都收敛，那么称为广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；否则，称为广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

计算无界函数的广义积分，也可借用牛顿－莱布尼茨公式．例如：

设$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$，在区间（$a$，$b$］上$F'(x)=f(x)$，则广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{a^+}^b=F(b)-F(a^+)=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x)$$

设$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$，在区间［$a$，$b$）上$F'(x)=f(x)$，则广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{b^-} = F(b^-) - F(a) = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$

例4 判断广义积分$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$的敛散性.

解 因为引例2已经求出 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$.

所以 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_{0^+}^1 = 0 - \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = +\infty$

故该广义积分发散.

例5 有一个热电子e从原点处的阴极A上出发（见图3-12），射向$x=b$处的极板B．已知飞行速度v与飞过的距离的平方根成正比，即$v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k\sqrt{x}$，其中$k$为常数．求电子e从$A$到$B$的飞行时间.

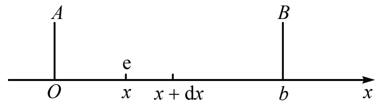


图3-12

解 由于电子飞行的速度是变动的，不能直接用匀速运动的时间公式，但速度函数$k\sqrt{x}$是连续的，在飞行的一个很短的路程里，如图3-12中的［x，$x+\mathrm{d}x$］上，速度可近似地看成与在点x处的速度相同，因此在这一段上用去的时间为$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{k\sqrt{x}}$，于是电子e从$x=0$到$x=b$的飞行时间为

$$T=\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{k\sqrt{x}} = \frac{2}{k}\sqrt{x}\Big|_{0^+}^b = \frac{2}{k}\sqrt{b}$$

练习3.6

判断下列广义积分的敛散性.

（1）$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}x$； （2）$\int_0^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$； （4）$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

3.7 定积分的应用

定积分的应用非常广泛，本节将介绍定积分在几何、物理、计算函数的平均值中的一些应用，包括工农业生产、工程技术和日常生活中的一些实际问题，其目的不仅是会解决这些具体问题，更重要的是学会用本节介绍的“微元法”将具体问题表示成定积分的思想和方法.

3.7.1 微元法

首先回顾本章开头求曲边梯形面积A的方法和步骤，设曲边梯形由连续曲线$y=f(x)$（$f(x)\geqslant 0$），直线$x=a$和$x=b$ $(a<b)$以及x轴围成：

（1）分割．将区间［a，b］分成n个小区间，相应地把曲边梯形分成n个小曲边梯形，设第i个小曲边梯形面积为ΔA_i（i=1，2，…，n），于是$A=\sum\limits_{i=1}^n \Delta A_i$

（2）近似代替．计算 ΔA_i 的近似值：$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$（$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$）

（3）求和．得 A 的近似值：$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

（4）取极限．$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

在上述四步中，最重要的是第（2）步，因为最后定积分的被积表达式的形式就是在这一步被确定的，这只要把近似式 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 中的变量记号改变一下即可（ξ_i 换为 x，Δx_i 换为 $\mathrm{d}x$）．而第（3）、（4）两步可以合并成一步，在区间［a，b］上无限累加，即在［a，b］上积分．至于第（1）步，它只是指明所求量具有可加性．

上述方法在实用时，为了简便，可在区间［a，b］上任取一个小区间［x，$x+\mathrm{d}x$］，ΔA 表示该区间上小曲边梯形面积，取小区间左端点 x 为 ξ_i，以点 x 处的函数值 $f(x)$ 为高，底为 $\mathrm{d}x$ 的矩形面积 $f(x)\mathrm{d}x$ 为 ΔA 的近似值，如图 3-13 所示的阴影部分，即

$$\Delta A\approx f(x)\mathrm{d}x$$

上式右端 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为面积微元，记做 $\mathrm{d}A$，即　$\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$，于是面积 A 就是这些面积微元在区间［a，b］上的“无限累加”，即从 a 到 b 的定积分：

$$A=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

通过上面的做法，我们可以把定积分——和式的极限理解为无限多个微元之和，即积分是微元的无限累加．

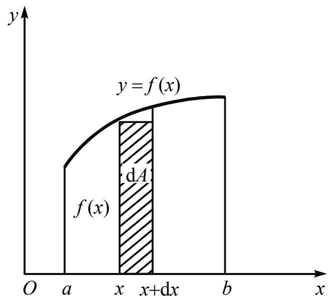


图 3-13

一般地，如果所求量 I 符合下列条件：

（1）I 与一个变量 x 的变化区间［a，b］有关；

（2）I 对于区间［a，b］具有可加性；

（3）部分量 ΔI_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$，那么这个量 I 就可以表示成定积分．

通常把 I 表示成定积分的步骤是：

（1）根据具体问题，选取一个变量如 x，并确定它的变化区间［a，b］．

（2）在区间［a，b］上任取小区间［x，$x+\mathrm{d}x$］，求出相应于［x，$x+\mathrm{d}x$］的部分量 ΔI 的近似值．如果 ΔI 的近似值可表示为连续函数 $f(x)$ 与 $\mathrm{d}x$ 的乘积，就把 $f(x)\mathrm{d}x$ 叫做量 I 的微元，记做

$$\mathrm{d}I=f(x)\mathrm{d}x$$

（3）以 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在［a，b］上作定积分，得到 I 的积分表示式为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这种方法称为微元法或元素法．下面用微元法讨论几何、物理中的一些应用问题．

3.7.2　定积分在几何中的应用

1．平面图形的面积

利用定积分，不但可以求曲边梯形的面积，还可以计算一些比较复杂的平面图形的面积．设平面图形由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 和直线 $x=a$，$x=b$ 围成，且在［a，b］上，

$f(x)\geqslant g(x)$ ，如图3-14所示.

根据图形特点，选取 x 为积分变量，其变化区间为 $[a, b]$，在 $[a, b]$ 上任取小区间［x，$x+\mathrm{d}x$］，相应［x，$x+\mathrm{d}x$］上的小窄条面积近似于高为［$f(x)-g(x)$］、底为 $\mathrm{d}x$ 的矩形面积，从而得到面积微元为

$$\mathrm{d}A=[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$$

以面积微元为被积表达式，在区间［a，b］上作定积分，得所求面积为

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x \tag{3.13}$$

类似地，设平面图形由曲线 $x=\varphi(y)$ ，$x=\psi(y)$ 和直线 $y=c$ ，$y=d$ 围成，且在 $[c, d]$ 上，$\varphi(y)\geqslant\psi(y)$ ，如图3-15所示.

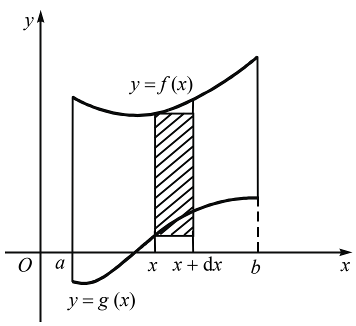


图3-14

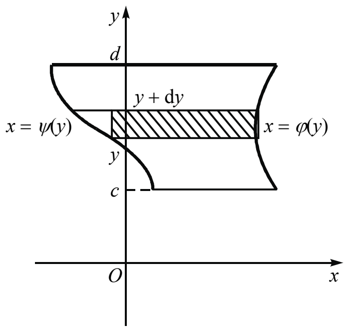


图3-15

根据图形特点，选取 y 为积分变量，其变化区间为 $[c, d]$，在 $[c, d]$ 上任取小区间［y，$y+\mathrm{d}y$］，相应［y，$y+\mathrm{d}y$］上的小窄条面积近似于底为［$\varphi(y)-\psi(y)$］、高为 $\mathrm{d}y$ 的矩形面积，从而得到面积微元为

$$\mathrm{d}A=[\varphi(y)-\psi(y)]\,\mathrm{d}y$$

以面积微元为被积表达式，在区间［c，d］上作定积分，得所求面积为

$$A=\int_c^d [\varphi(y)-\psi(y)]\,\mathrm{d}y \tag{3.14}$$

例1　计算由两条抛物线 $y=x^2$ 及 $y^2=x$ 所围成的图形的面积.

解　这两条抛物线所围成的平面图形如图3-16所示，为了具体定出图形的所在范围，先求出这两条抛物线的交点.

解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=x \end{cases}$　得交点为（0，0），（1，1）.

由　$y^2=x$，得 $y=\pm\sqrt{x}$.

根据图形特点，确定 x 为积分变量，它的变化区间为［0，1］. 由公式（3.13），得

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

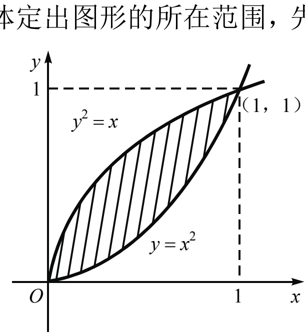


图3-16

例2　计算由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x-y-4=0$ 所围成的图形的面积.

解　抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x-y-4=0$ 所围成的图形如图3-17所示.

解方程组$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$　得交点为（2，–2），（8，4）.

根据图形特点，确定 y 为积分变量，它的变化区间为［–2，4］. 由公式（3.14），得

$$A = \int_{-2}^{4}\left[(y+4) - \frac{1}{2}y^2\right]\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3\right)\Big|_{-2}^{4} = 18$$

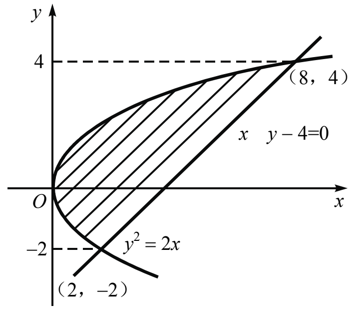


图 3-17

注意

本例如果选取 x 为积分变量，那么其变化区间为［0，8］，由于在区间［0，2］和［2，8］上的面积微元表达式不一样，所以需过点（2，–2）作直线 $x=2$ 将图形分成两部分，然后分别应用公式（3.13），得

$$A = \int_0^2 \left[\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})\right]\mathrm{d}x + \int_2^8 \left[\sqrt{2x} - (x-4)\right]\mathrm{d}x = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18$$

显然这样做计算量比较大，因此要注意恰当选择积分变量.

2．旋转体的体积

由曲线 $y=f(x)$［$f(x) \geqslant 0$］，直线 $x=a$ 和 $x=b$（$a<b$）及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周，便得到一个旋转体，如图 3-18 所示.

下面用微元法求该旋转体的体积.

确定 x 为积分变量，它的变化区间为［a，b］，在区间［a，b］上任取一小区间［x，$x+\mathrm{d}x$］，其上小旋转体的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径，$\mathrm{d}x$ 为高的小圆柱体体积，从而得到体积微元为

$$\mathrm{d}V = \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

以体积微元为被积表达式，在区间［a，b］上作定积分，得所求旋转体的体积为

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

即

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x \tag{3.15}$$

类似地，由曲线 $x=\varphi(y)$（$\varphi(y) \geqslant 0$），直线 $y=c$ 和 $y=d$（$c<d$）及 y 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周，也得到一个旋转体，如图 3-19 所示.

确定 y 为积分变量，它的变化区间为$[c, d]$，在区间$[c, d]$上任取一小区间［y，$y+\mathrm{d}y$］，其上小旋转体的体积近似于以 $\varphi(y)$ 为底半径，$\mathrm{d}y$ 为高的小圆柱体体积，从而得到体积微元为

$$dV=\pi[\varphi(y)]^2 dy$$

以体积微元为被积表达式，在区间［c，d］上作定积分，得所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy \tag{3.16}$$

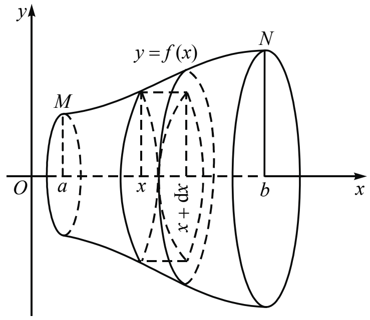


图 3-18

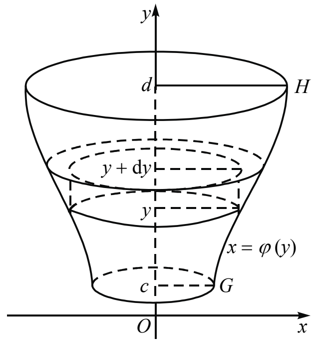


图 3-19

例 3　求由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $x=10$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积．

解　如图 3-20 所示，因为绕 x 轴旋转，所以确定 x 为积分变量，它的变化区间为［0，10］．由公式（3.15），得

$$V=\pi\int_0^{10}(\sqrt{x})^2 dx=\pi\int_0^{10} x dx=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^{10}=50\pi$$

3．平面曲线的弧长

设平面曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的直角坐标方程为 $y=f(x)$ （$a\leqslant x\leqslant b$），且 $f(x)$ 在区间［a，b］上具有一阶连续的导数，如图 3-21 所示．下面用微元法求曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长．

取 x 为积分变量，它的变化区间为［a，b］，在［a，b］上任取一小区间［x，$x+dx$］，设与此小区间相对应的曲线弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的弧长为 Δs，由图 3-21 可知，Δs 近似于该曲线在点［$x, f(x)$］处的切线相应的切线长 $|PT|$，且

$$|PT|=\sqrt{|PR|^2+|RT|^2}=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}dx$$

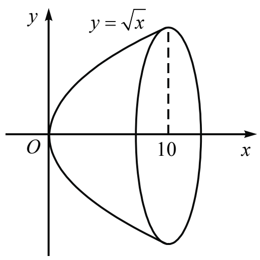


图 3-20

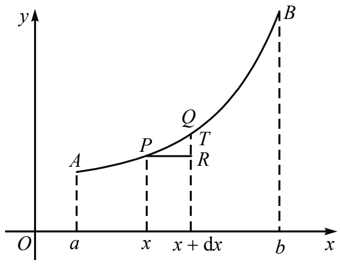


图 3-21

于是弧长微元为

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$$

故所求曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{3.17}$$

例 4　两根电线杆之间的电线，由于自身质量而下垂成曲线，这种曲线称为悬链线．已知悬链线方程为 $y=\frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$ （$a>0$），求从 $x=-a$ 到 $x=a$ 这一段的弧长，如图 3-22 所示．

解　因为 $y'=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$ ，所以　$y'^2=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\frac{2x}{a}}-2+\mathrm{e}^{-\frac{2x}{a}})$

于是　$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$

取 x 为积分变量，它的变化区间为［$-a$，a］，由公式（3.17），得所求弧长为

$$s=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})\Big|_{-a}^{a}=a(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})$$

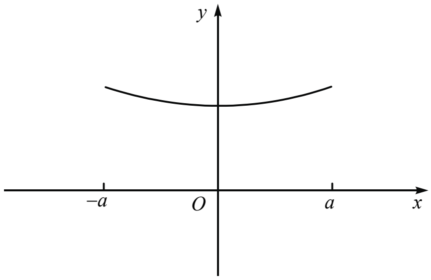


图 3-22

3.7.3　定积分在物理中的应用

1．变力所做的功

我们知道，如果物体在一个常力 F 的作用下，沿力的方向作直线运动，移动距离为 s，那么力 F 所做的功为

$$W=F\cdot s$$

如果物体在运动中所受的力 F 是变化的，显然上述公式不适用，下面用微元法解决此类问题．

设物体在变力 $F(x)$ 的作用下沿 x 轴由 $x=a$ 移动到 $x=b$，如图 3-23 所示，计算变力 $F(x)$ 所做的功．

取 x 为积分变量，它的变化区间为［a，b］，在［a，b］上任取一小区间［x，$x+\mathrm{d}x$］，则 $F(x)$ 在此小区间上所做的功近似于点 x 处的力 $F(x)$ 乘以距离 $\mathrm{d}x$，从而得到功的微元为

$$\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$$

以功的微元为被积表达式，在区间［a，b］上作定积分，得变力 $F(x)$ 所做的功为

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x \tag{3.18}$$

例 5　已知某弹簧的弹性系数为 $k=500$（N/m），在弹性限度内，拉伸弹簧所用的力 F（N）与伸长量 x（m）成正比，即 $F(x)=kx=500x$，现将弹簧由原长拉伸了 4cm，计算拉力所做的功．

解　设弹簧拉伸端在不受外力时的位置为坐标原点（另一端被固定），如图 3-24 所示．

取 x 为积分变量，因为 4cm=0.04m，所以积分区间为［0，0.04］，由公式（3.18），得所求拉力所做的功为

$$W=\int_0^{0.04}500x\mathrm{d}x=\frac{500}{2}x^2\Big|_0^{0.04}=0.4\ （\mathrm{J}）$$

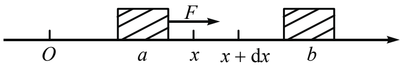


图 3-23

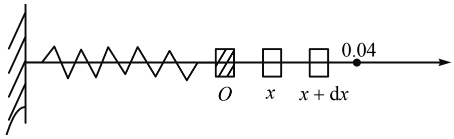


图 3-24

2．液体压力

从物理学知道，在液体深度为 h 的地方，压强为 $p=\rho gh$（ρ 是液体的密度，g 是重力加速度），如果有一个面积为 A 的平板水平放置在水深为 h 处，那么平板一侧所受的压力为

$$F=pA$$

如果薄片平板垂直放置在液体中，那么由于液体深度不同，压强也不同，所以平板一侧所受的压力不能用上述方法计算，下面用微元法解决此类问题．

如图 3-25 所示，设垂直放置在液体中的薄片平板为曲边梯形，其曲边方程为 $y=f(x)$．

在深度为 x 处取一宽度为 $\mathrm{d}x$ 的水平小平板，其面积为 $f(x)\mathrm{d}x$，因而得到压力微元为

$$\mathrm{d}F=\rho gxf(x)\mathrm{d}x$$

以压力微元为被积表达式，在区间［a，b］上作定积分，得平板一侧所受压力为

$$F=\int_a^b\rho gxf(x)\mathrm{d}x=\rho g\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \tag{3.19}$$

例 6　一闸门呈倒置的等腰梯形垂直位于水中，两底长度分别为 6m 和 8m，高为 8m，当闸门上底面正好位于水面时，求闸门一侧受到的水压力．（水的密度为 $\rho=1000\,\mathrm{kg/m^3}$）

解　如图 3-26 所示建立坐标系，则闸门右腰 AB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{8}x+4$．

取 x 为积分变量，它的变化区间为［0，8］．由公式（3.19），得所求压力为

$$F=2F_1=2\rho g\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=2\times1000\times9.8\times\int_0^8 x(-\frac{1}{8}x+4)\mathrm{d}x$$

$$=19\,600\int_0^8(4x-\frac{1}{8}x^2)\mathrm{d}x=19\,600(2x^2-\frac{1}{24}x^3)\Big|_0^8$$

$$\approx20.91\times10^5\ （\mathrm{N}）$$

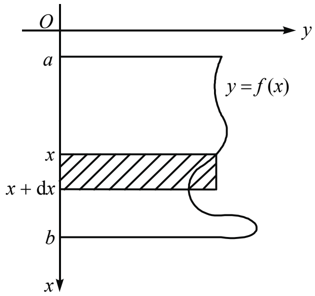


图 3-25

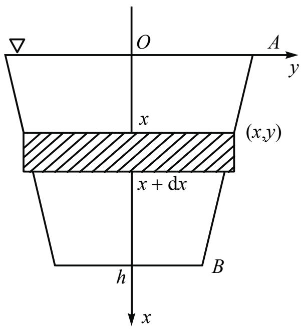


图 3-26

注意

本题求解时 x 轴两侧的压力都要考虑.

3.7.4　求函数的平均值及其应用

我们知道，n 个数值 y_1，y_2，…，y_n 的算术平均值为

$$\overline{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

但是，一个连续函数 $y=f(x)$ 在区间［a，b］上所取得的一切值的平均值如何求呢？例如，在日常生活和工农业生产中遇到的平均温度，非稳态电流的平均电流、平均电压、平均功率等怎么计算呢？

如果函数 $y=f(x)$ 在区间［a，b］上连续，那么它在［a，b］上的平均值 $\overline{y}$ 等于它在［a，b］上的定积分除以区间［a，b］的长度 $b-a$，即

$$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{3.20}$$

公式(3.20)称为函数的平均值公式,其中的 $\overline{y}$ 就是本章 3.2 节积分中值定理中的 $f(\xi)$. 下面利用公式（3.20）解决求平均温度的问题.

例 7　设某车间某日早班 8h 内气温的数学模型是

$$T(t)=12+3t-0.2t^2\ （0\leqslant t\leqslant 8）$$

其中，t 表示工作时间，单位是小时（h）；T 表示温度，单位是℃.（1）求工作 8h 内的平均温度.（2）求工作前 4h 内的平均温度.

解　（1）工作 8h 内的平均温度为

$$\overline{T}=\frac{1}{8}\int_0^8 T(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_0^8(12+3t-0.2t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{8}\left(12t+\frac{3}{2}t^2-\frac{0.2}{3}t^3\right)\Big|_0^8\approx 19.7\ （℃）$$

（2）工作前 4h 内的平均温度为

$$\overline{T_1}=\frac{1}{4}\int_0^4 T(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^4(12+3t-0.2t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\left(12t+\frac{3}{2}t^2-\frac{0.2}{3}t^3\right)\Big|_0^4\approx 16.9\ （℃）$$

练习 3.7

1．求下列各曲线所围成的平面图形的面积.

（1）抛物线 $y=1-x^2$ 与直线 $y=x^2-1$；

（2）抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=\frac{3}{2}-x$.

2．求下列旋转体体积.

（1）曲线 $y=x^2$ 与 $x=2$，$x=4$，$y=0$ 所围图形绕 x 轴旋转.

（2）圆 $x^2+y^2=r^2$ 绕 x 轴旋转.

（3）曲线 $y=x^2$（$x\geqslant 0$）与 $y=1$，$x=0$ 所围图形绕 y 轴旋转.

3．设有一个弹簧，用 5N 的力可以把它拉长 0.01m，求把弹簧拉长 0.1m，力所做的功.

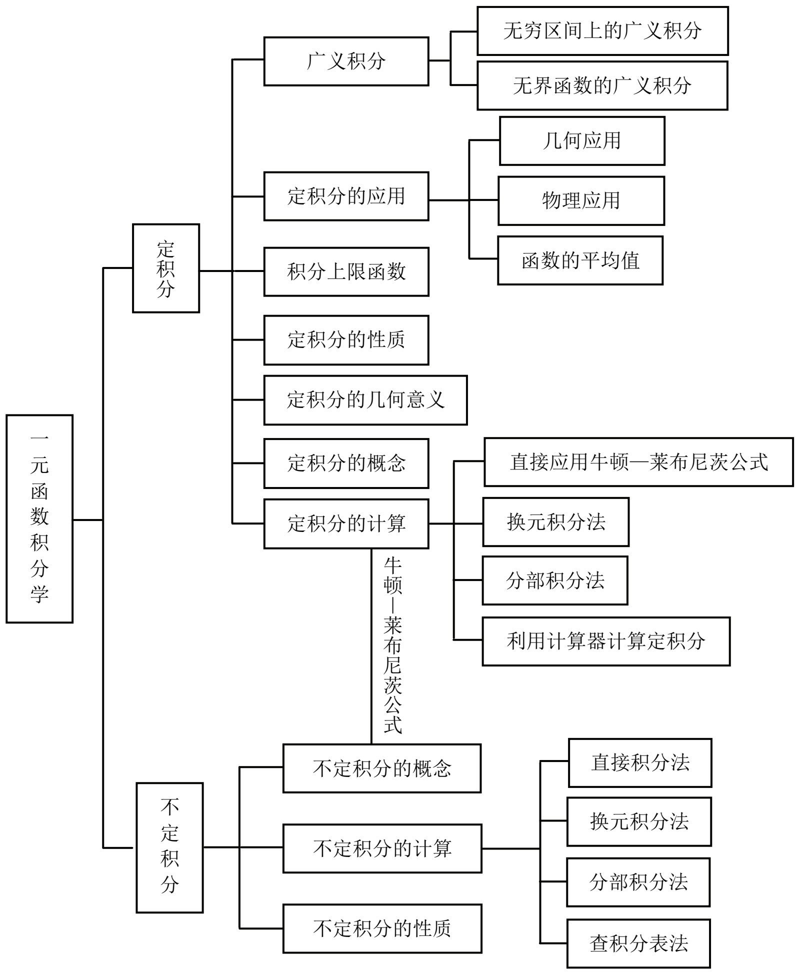
4．设一个水平放置的水管，其断面是直径为 6m 的圆，求当水半满时，水管一端的竖直闸门上所受的压力.

5．设某日 12h 内气温的数学模型是

$$T(t)=6+4t-0.2t^2 \quad (0\leqslant t\leqslant 12)$$

其中，t 表示时间，单位是小时（h）；T 表示温度，单位是℃.（1）求 12h 内的平均温度.（2）求前 6h 内的平均温度.

本章知识结构图



数学史话 4

笛卡儿（R.Descartes，1596—1650，法国哲学家和数学家）

近代数学本质上可以说是变量数学．变量数学的第一个里程碑是解析几何的发明．解析几何的基本思想是在平面上引进所谓“坐标”的概念，并借助这种坐标将平面上的点和有序实数对（x，y）之间建立一一对应的关系．每一对实数（x，y）都对应于平面上的一个点；反之，每一个点都对应于它的坐标（x，y）．以这种方式可以将一个代数方程 $f(x, y)=0$ 与平面上一条曲线对应起来，于是几何问题便可归结为代数问题，并反过来通过代数问题的研究发现新的几何结果．

解析几何的真正发明还要归功于法国另外两位数学家笛卡儿与费马．他们工作的出发点不同，但却殊途同归．

笛卡儿出生于法国都伦的拉哈耶，贵族家庭的后裔，父亲是一个律师．他早年受教于拉福累歇的耶稣会学校．1612 年赴巴黎从事研究，曾于 1617 年和 1619 年两次从军，离开军营后，旅行于欧洲，他的学术研究是在军旅和旅行中作出的．

关于笛卡儿创立解析几何的灵感有几个传说．一个传说讲，笛卡儿终身保持着在耶稣会学校读书期间养成的“晨思”习惯，他在一次“晨思”时，看见一只苍蝇正在天花板上爬，他突然想到，如果知道了苍蝇与相邻两个墙壁的距离之间的关系，就能描述它的路线，这使他头脑中产生了关于解析几何的最初理念．另一个传说是，1619 年冬天，笛卡儿随军队驻扎在多瑙河的一个村庄，在圣马丁节的前夕（11 月 10 日），他做了三个连贯的梦．笛卡儿后来说正是这三个梦向他揭示了“一门奇特的科学”和“一项惊人的发现”，虽然他从未明说过这门奇特的科学和这项惊人的发现是什么，但这三个梦从此成为后来每本介绍解析几何的诞生的著作必提的佳话，它给解析几何的诞生蒙上了一层神秘色彩．人们在苦心思索之后的睡梦中获得灵感与启示不是不可能的．但事实上笛卡儿之所以能创立解析几何，主要是他艰苦探索、潜心思考，运用科学的方法，同时批判地继承前人的成就的结果．

摘自《数学史概论》李文林．（第二版）

笛卡儿遍历欧洲，最后定居荷兰（1628）．他在荷兰期间，几乎对所有的人类知识部门都作出了贡献．他最早出版的一部著作是（《论方法》，1637），附有三篇短论（《屈光学》，《流星》和《几何学》），其中最后一篇短论解释了坐标几何的原理．在稍后一部著作（《哲学原理》，1644）中，他曾试图借助其著名的原子涡动说对太阳系作纯粹的力学解释．他还写过许多曾经得到广泛流行的哲学著作．

摘自《数学史》斯科特；侯德润，张兰译

费马（P.de Fermat，1601—1665，法国数学家）

佩亚尔·费马是异常有天才的数学家，曾被指定学习法律，但他用余暇致力于数学研究，作出了有价值的贡献．他在研究几何的过程中发现了坐标几何的原理，并且在某种程度上预见到微积分的方法．他振兴了数论研究，并和帕斯卡一起奠定了概率论的数学理论的基础．

摘自《数学史》斯科特；侯德润，张兰译

第 4 章　向量代数与空间解析几何

以前学过的平面解析几何是用代数的方法研究平面的几何图形，但在日常工作和生活中，还会遇到空间的几何图形，这就需要人们研究空间解析几何．本章首先建立空间直角坐标系，并引进在工程技术中有着广泛应用的空间向量及一些基本知识，然后以空间向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍几种常见的曲面和空间曲线．

4.1　空间直角坐标系

4.1.1　空间点的坐标表示

空间解析几何是用代数方法研究空间的几何问题．为此，首先就要解决如何用数来确定空间任意一点的位置．

引例　气象台放出一个探测气球，要想说明某时刻气球的位置，如果只说明多高，或者只说明离气象台多远，都不能达到目的．但是如果说，以气象台为中心，向东 800m，向北 600m，离地面 500m，这样就确定了探测气球在空间的位置．

仿照引例，引入空间直角坐标系的概念．在空间取定一点 O，过 O 作三条互相垂直的数轴 Ox、Oy 及 Oz（一般具有相同的长度单位），它们的正方向要符合右手规则，即以右手握住 Oz 轴，当右手的四个手指从 Ox 轴的正向以 $\pi/2$ 角转向 Oy 轴的正向时，大拇指的指向就是 Oz 轴的正向，如图 4-1 所示，这样就构成了空间直角坐标系 $Oxyz$．点 O 称为坐标原点，数轴 Ox 简称为 x 轴（横轴），数轴 Oy 简称为 y 轴（纵轴），数轴 Oz 简称为 z 轴（竖轴），x 轴、y 轴和 z 轴统称为坐标轴．

每两条坐标轴确定一个平面，称为坐标面．由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 xOy 面，由 y 轴和 z 轴确定的坐标面称为 yOz 面，由 z 轴和 x 轴确定的坐标面称为 zOx 面．

三个坐标面将空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限．含有 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴的卦限称为第一卦限，在 xOy 面的上方按逆时针方向，依次分别称为第二、第三及第四卦限．而位于其下方的部分依次称为第五、第六、第七及第八卦限．这八个卦限一般用罗马字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示，如图 4-2 所示．

确定了空间直角坐标系后，就可以建立空间中的点与有序数组之间的一一对应关系．

设点 M 为空间的已知点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于 P，Q，R 三点．设点 P，Q，R 在 x 轴、y 轴和 z 轴的坐标分别为 x、y 和 z，则点 M 唯一确定了一个有序数组（x，y，z），称为点 M 的空间直角坐标，记做 M（x，y，z），其中 x、y、z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标，如图 4-3 所示；反之，给定一个有序数组（x，y，z），则可在 x 轴取定坐标为 x 的点 P，在 y 轴取定坐标为 y 的点 Q，在 z 轴取定坐标为 z 的点 R，然后过点 P，Q，R 分别作平面与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直，它们交于唯一的一

点 M，点 M 就是有序数组所唯一确定的点，如图 4-3 所示．这样，通过空间直角坐标系，就建立了空间的点 M 与有序数组（x，y，z）之间的一一对应关系．

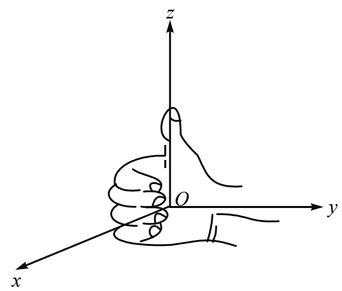


图 4-1

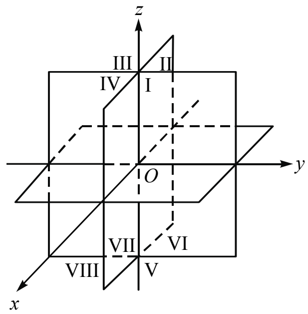


图 4-2

显然，坐标原点 O 的坐标为（0，0，0），x 轴上的点的坐标为（x，0，0）；y 轴上点的坐标为（0，y，0）；z 轴上点的坐标为（0，0，z）．xOy 面，yOz 面，zOx 面上点的坐标分别为（x，y，0），（0，y，z），（x，0，z）．

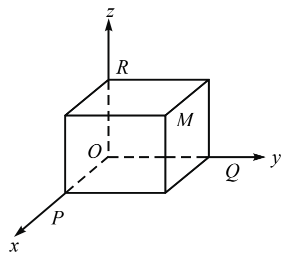
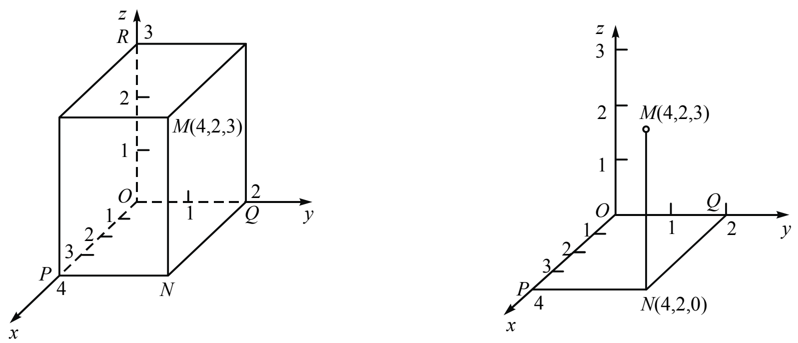


图 4-3

例 1　在空间直角坐标系中作出坐标为（4，2，3）的点 M．

解　建立空间直角坐标系，如图 4-4（a）所示，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取坐标为（4，0，0）、（0，2，0）、（0，0，3）的点 P，Q，R，过点 P，Q，R 分别作平面与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直，它们的交点即为坐标为（4，2，3）的点 M．



（a）　　（b）

图 4-4

坐标为（4，2，3）的点 M 也可以用如下方法作出：如图 4-4（b）所示，在 x 轴、y 轴上取坐标分别为（4，0，0），（0，2，0）的点 P，Q 过 P，Q 分别作平行于 y 轴、x 轴的平行线，交于点 N（4，2，0）．

过点 N（4，2，0）作平行于 z 轴且向上的线段 NM，长度为 3 个单位，则端点 M 即为坐标为（4，2，3）的点．

4.1.2 空间两点间的距离

将平面解析几何两点间的距离公式推广，就得到空间两点间的距离公式：

设 M_1（x_1，y_1，z_1）和 M_2（x_2，y_2，z_2）为空间两点，则点 M_1 与 M_2 之间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{4.1}$$

特别地，点 M（x，y，z）与坐标原点 O（0，0，0）之间的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{4.2}$$

例 2 已知两点 M_1（–1，0，2）和 M_2（1，–1，0），求这两点间的距离.

解 由空间两点间的距离公式（4.1），得

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(1+1)^2+(-1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+1+4}=3$$

练习 4.1

1．在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限.

A（1，–2，3），B（4，1，–1），C（–1，–2，–3）.

2．xOy 面，yOz 面，zOx 面上点的坐标各有什么特点？

3．x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标各有什么特点？

4．求下列两点间的距离.

（1）（0，0，0），（4，2，3）；

（2）（1，–2，3），（–1，–2，3）.

5．点 A（1，3，2）到三个坐标面的距离.

4.2 空间向量

4.2.1 空间向量的基本概念

实际问题中所遇到的量分为两种：一种量是只有大小，如时间、温度、距离等，这种量称为数量；另一种量是既有大小，又有方向，如力、速度、位移，这种量称为向量或矢量.

向量可用一条有向线段来表示，有向线段的长度表示向量的大小，称为向量的模，有向线段的方向表示向量的方向. 如起点为 A，终点为 B 的有向线段所表示的向量记做 $\overline{AB}$，如图 4-5 所示，它的模记做 $|\overline{AB}|$，方向由 A 到 B. 有时为了简单，还可以用小写黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，或 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等来标记向量，如图 4-5 所示.

在实际问题中，有些向量与起点有关，但多数向量与起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，因此数学只研究与起点无关的向量，这种向量称为自由向量，简称向量，即只考虑向量的大小和方向，而不考虑它的起点在什么地方. 因此，一个向量，经过任意平移后得到的向量，都认为是同一个向量.

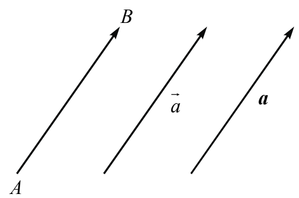


图 4-5

方向相同或相反的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 称为平行向量，记做 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 模相等且方向相同的两个

向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 称为相等向量，记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等但方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记做 $-\boldsymbol{a}$．模等于 1 的向量称为单位向量．模等于零的向量称为零向量，记做 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$，零向量的方向任意．

4.2.2　向量的线性运算

1．向量的加法

如图 4-6 所示，在力学中求作用于同一质点的两个不同方向的力的合力 F 时，采用平行四边形法则或三角形法则．

对于一般的向量，规定两个向量的加法法则如下：

法则 1（平行四边形法则）　当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行时，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记做 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 4-7（a）所示．

法则 2（三角形法则）　已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，如图 4-7（b）所示，那么向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记做 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．

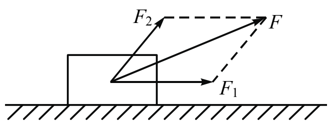


图 4-6

（a）　（b）

图 4-7

上面求向量和的方法称为向量的加法．

向量加法的三角形法则可以推广到多个向量求和，例如，求向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的和时，可将它们平移，使它们首尾相连，然后以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点作向量，即为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的和，如图 4-8 所示．

向量的加法满足以下运算律（设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为向量）：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$．

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

2．向量的减法

设给定向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，如果有一向量 $\boldsymbol{c}$，使得 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，那么向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记做 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．

求向量差的方法称为向量的减法．根据上面定义，得向量减法的作图法如下：从一点 O 作两向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么以 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 为起点，$\boldsymbol{a}$ 的终点 A 为终点的向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$ 的差，如图 4-9 所示．

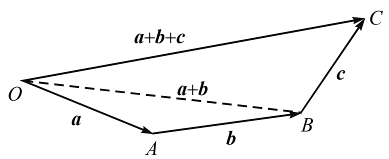


图 4-8

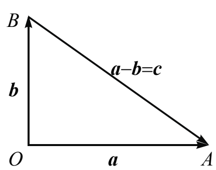


图 4-9

3．数与向量的乘法（简称数乘向量）

实数λ与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记做$\lambda\boldsymbol{a}$，它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；它的方向是：当$\lambda>0$时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当$\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向任意.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有 $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

例如，已知向量 $\boldsymbol{a}$，则 $2\boldsymbol{a}$，$-3\boldsymbol{a}$ 如图 4-10 所示.

数与向量的乘法满足以下运算律（设λ、μ为实数，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为向量）：

（1）结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$

（2）分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

向量相加、减及数乘向量的运算统称为向量的线性运算.

由数乘向量的定义可知，对任意实数λ，向量$\lambda\boldsymbol{a}$ 都与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行．于是有：

定理 4.1 向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充要条件是存在一个实数λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

把与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向且模为 1 的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记做 $\boldsymbol{a}^0$，显然有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \tag{4.3}$$

或

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \tag{4.4}$$

（4.4）式说明任一非零向量都可以分解成它的模与它的单位向量的乘积.

例 1 设平行四边形 $ABCD$ 两条对角线 AC 与 BD 的交点为 M，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，如图 4-11 所示.

（1）试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$；

（2）试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$.

解 由图 4-11 所示，得

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

因为平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 互相平分，所以

$$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC},\quad \overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$$

于是 $2\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$2\overrightarrow{MD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

因此 $\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

故 $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{MC}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{MD}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

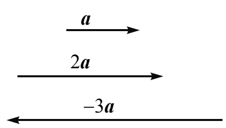


图 4-10

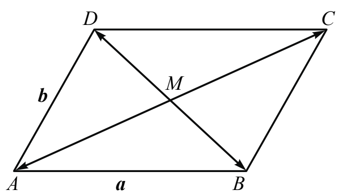


图 4-11

4.2.3　向量的坐标表示

上面介绍的向量的线性运算，都需要画图表示，这对于向量的运算和应用极不方便，为此下面介绍向量的坐标表示.

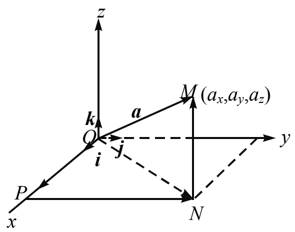


图 4-12

首先在空间建立空间直角坐标系 $Oxyz$．令沿 x 轴、y 轴、z 轴正向的三个单位向量分别为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$（或$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$）称为基本单位向量．设给定向量 $\boldsymbol{a}$，由于向量可以平移，不妨将 $\boldsymbol{a}$ 的起点与坐标原点重合，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，这时 $\boldsymbol{a}$ 的终点 M 完全由 $\boldsymbol{a}$ 确定，设终点 M 的坐标为（a_x，a_y，a_z)．过点 M 作 xOy 面的垂线，与 xOy 面相交于点 N，再过点 N 作 x 轴的垂线，与 x 轴相交于点 P，如图 4-12 所示．由向量加法的三角形法则可得

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$$

再由数乘向量的定义及$\overrightarrow{OP}//\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{PN}//\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{NM}//\boldsymbol{k}$，得

$$\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i}，\ \overrightarrow{PN}=a_y\boldsymbol{j}，\ \overrightarrow{NM}=a_z\boldsymbol{k}$$

于是

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{4.5}$$

式（4.5）称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示，简记做 $\boldsymbol{a}=\{a_x，a_y，a_z\}$，其中的数 a_x，a_y，a_z 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的横、纵、竖坐标.

由上面的推导可以看出，当向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点时，向量的坐标与其终点的坐标是一样的.

前面学过的向量的线性运算，现在用坐标表示如下：

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，$\lambda$为实数，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

或　$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x，a_y\pm b_y，a_z\pm b_z\}$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$$

或　$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x，\lambda a_y，\lambda a_z\}$

例 2　已知 $\boldsymbol{a}=\{3，-1，0\}$，$\boldsymbol{b}=\{1，2，-2\}$，求 $4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$.

解　因为　$4\boldsymbol{a}=\{12，-4，0\}$，$5\boldsymbol{b}=\{5，10，-10\}$

所以　$4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\{12，-4，0\}+\{5，10，-10\}$

$=\{12+5，-4+10，0+(-10)\}$

$=\{17，6，-10\}$

例 3　如图 4-13 所示，已知 M_1（x_1，y_1，z_1)，M_2（x_2，y_2，z_2）两点，求以点 M_1 为起点，点 M_2 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标.

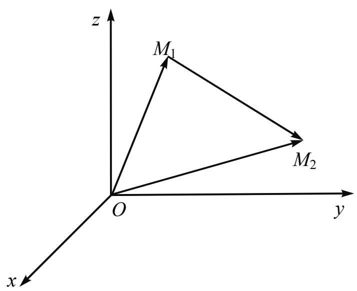


图 4-13

解　作向量 $\overrightarrow{OM_1}$，$\overrightarrow{OM_2}$，则

$$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1，y_1，z_1\}，\ \overrightarrow{OM_2}=\{x_2，y_2，z_2\}$$

因为　$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$

所以　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2，y_2，z_2\}-\{x_1，y_1，z_1\}$

$=\{x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1\}$

上式说明，如果向量的起点不在坐标原点时，那么该向量的坐标就是终点坐标减去起点坐标的差.

例如，已知 M_1（−1，0，4），M_2（3，2，−5）两点，则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{3-(-1),\ 2-0,\ -5-4\}=\{4,\ 2,\ -9\}$$

即

$$\overrightarrow{M_1M_2}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$$

设已知非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$，其模和方向怎样计算呢？

如果我们把 $\boldsymbol{a}$ 的起点放在坐标原点，那么它的终点 M 的坐标也就是 $\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$，由空间两点间距离公式可知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=|OM|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可由该向量与三个坐标轴正向的夹角 α，β，γ（规定 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$）或这三个角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 来表示，如图 4-14 所示.

α，β，γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦．如果已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$，那么由图 4-14 知其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}}$$

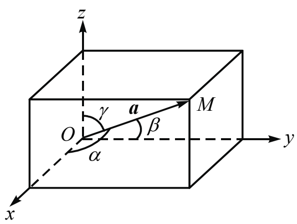


图 4-14

将上面三个等式两边平方后相加，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

上式说明，任一非零向量的方向余弦的平方和等于 1.

因为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，所以

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{|\vec{a}|}\vec{i}+\frac{a_y}{|\vec{a}|}\vec{j}+\frac{a_z}{|\vec{a}|}\vec{k}$$

$$=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$$

故向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦就是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 的坐标.

例 4　试证：向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充要条件是它们的对应坐标成比例.

证　设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，由本节定理知向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$$

于是　$b_x=\lambda a_x$，$b_y=\lambda a_y$，$b_z=\lambda a_z$

因此　$\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}=\lambda$

例 5　已知两点 A（−1，0，$2\sqrt{2}$），B（0，−1，$\sqrt{2}$），求向量 $\overline{AB}$ 的模、方向余弦和

方向角.

解　因为　$\overrightarrow{AB}=\{0+1,-1-0,\sqrt{2}-2\sqrt{2}\}=\{1,-1,-\sqrt{2}\}$.

所以模为　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=2$.

于是方向余弦为　$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=-\frac{1}{2}$，$\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

因此方向角为　$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，$\gamma=\frac{3\pi}{4}$

4.2.4　空间向量的数量积与向量积

1．空间两向量的数量积

如图 4-15 所示，由物理学知道，一个物体在恒力 F 的作用下，沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，如果以 s 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$，设 F 与 s 所成的角为 θ，那么力 F 所做的功为

$$M=|F||s|\cos\theta$$

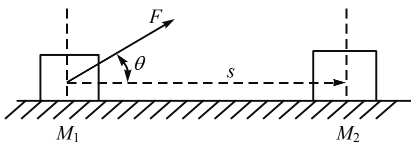


图 4-15

在实际工作中，还会遇到许多类似于功的计算的问题，因此数学中把这种运算抽象为向量的数量积，定义如下：

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模及它们夹角 θ 的余弦称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记做 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

由数量积的定义可得

（1）$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

（2）非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

由此，基本向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 具有如下性质：

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1；\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$$

数量积满足以下运算律（设 λ 为实数，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为向量）：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

（2）结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$

（3）分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则其数量积的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$$

因此非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件为　$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

例 6 计算 $\boldsymbol{a}=\{2, 0, -3\}$，$\boldsymbol{b}=\{-4, 1, 1\}$的数量积.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-4)+0\times1+(-3)\times1=-11$

2．空间两个向量的向量积

设有一根细铁棍，它的一个端点 O 固定，有一个恒力 F 作用在它的另一个端点 P 上．力的作用使 OP 绕 O 点转动，如图 4-16 所示，力学中用力矩表示 F 对 OP 转动作用的大小．力矩是一个向量，记做 M．力矩 M 的大小等于力 F 在垂直于$\overrightarrow{OP}$的方向上的分力的大小乘以$\left|\overrightarrow{OP}\right|$，即

$$|M|=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot|F|\cdot\sin\theta$$

其中θ是$\overrightarrow{OP}$与 F 所成的夹角．力矩 M 的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$与 F 所确定的平面，且由“右手规则”来确定，即当右手的食指指向$\overrightarrow{OP}$，中指指向 F 时，大拇指的指向就是 M 的指向．像力矩这样的向量运算在数学中把它抽象为向量的向量积，定义如下：

已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果向量 $\boldsymbol{c}$ 按下面的（1）、（2）确定：

（1）$\boldsymbol{c}$ 的模$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中$\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

（2）$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面（即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$），指向按“右手规则”来确定，即当右手的食指指向 $\boldsymbol{a}$，中指指向 $\boldsymbol{b}$ 时，大拇指的指向就是$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的指向，如图 4-17 所示．那么向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

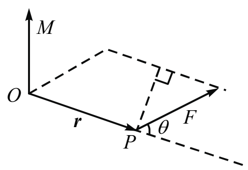


图 4-16

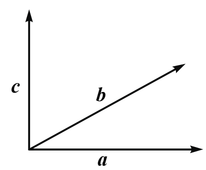


图 4-17

两个向量的向量积仍是一个向量，而两个向量的数量积则是一个数量．

由向量积的定义可得

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$．

（2）非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$．

关于基本向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，显然有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

向量积满足以下运算律（设λ为实数，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为向量）：

（1）反交换律　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$

（2）结合律　$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$

（3）分配律　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

设向量$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则其向量积的坐标表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

为了帮助记忆，常把上式写成三阶行列式的形式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

例 7　设向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -4 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}\\ &=(-4)\times2\times\boldsymbol{i}+3\times(-3)\times\boldsymbol{k}+2\times(-1)\boldsymbol{j}-(-4)\times2\times\boldsymbol{k}-(-1)\times(-3)\times\boldsymbol{i}-2\times3\times\boldsymbol{j}\\ &=-11\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

练习 4.2

1．已知两点 M_1（3，0，2），M_2（4，$\sqrt{2}$，1），求：

（1）向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标；

（2）向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

2．已知向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，其终点为 B（−1，1，0），求起点 A 的坐标.

3．设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

（1）$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$；　　（2）$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$；

（3）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　（4）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

（5）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦.

4．已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位向量.

4.3　平面与空间直线的方程

4.3.1　平面的方程

1．平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一个平面，那么此向量称为该平面的**法线向量**（简称**法向量**）. 很显然，法向量垂直于平面上的每一个向量.

设点 M_0（x_0，y_0，z_0）为平面π上一定点，向量 $\boldsymbol{n}=\{A，B，C\}$为平面π的法向量，下面建立平面π的方程.

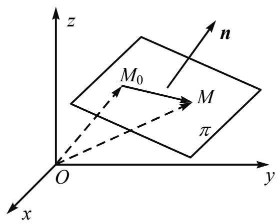


图 4-18

如图 4-18 所示，设点 M（x，y，z）为平面π上任意一点，作向量 $\overrightarrow{M_0M}$，则 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$，因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$，所以

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{4.6}$$

显然平面π上任一点满足方程（4.6）. 反之，如果点 M（x，y，z）不在平面π上，那么 $\overrightarrow{M_0M}$ 不垂直 $\boldsymbol{n}$，从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq0$，即点 M 的坐标不满足方程（4.6），所以方程（4.6）是平面π的方

程．方程（4.6）称为平面π 的**点法式方程**.

例 1　已知平面过点（2，2，2）且与向量$\boldsymbol{n}=\{1，-4，5\}$垂直，求该平面的点法式方程.

解　由平面的点法式方程，得

$$1\cdot(x-2)+(-4)\cdot(y-2)+5\cdot(z-2)=0$$

即 $$x-4y+5z-4=0$$

例 2　已知两点 M（2，–1，2）、N（8，–7，5），求通过 N 且与线段 MN 垂直的平面的方程.

解　因为所求平面与线段 MN 垂直，所以向量$\overrightarrow{MN}$就是它的法向量 $\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{MN}=\{8-2，-7+1，5-2\}=\{6，-6，3\}$$

因为该平面过点 N（8，–7，5），所以所求平面方程为

$$6\cdot(x-8)+(-6)\cdot(y+7)+3\cdot(z-5)=0$$

即 $$2x-2y+z-35=0$$

2．平面的一般式方程与截距式方程

由上面的讨论可以看出，任一平面方程都是三元一次方程．反之，任一三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{4.7}$$

的图形必为平面．这是因为任取满足方程（4.7）的一组数（x_0，y_0，z_0），有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \tag{4.8}$$

式（4.7）–式（4.8），得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

这是过点 M_0（x_0，y_0，z_0）且法向量$\boldsymbol{n}=\{A，B，C\}$的平面方程，即任一三元一次方程的图形是一平面．我们把方程（4.7）称为平面的**一般式方程**，其中的系数 A，B，C 就是该平面的法向量的坐标.

例 3　求过点 M（1，–1，3）且平行于平面$x-2y+3z-5=0$的平面方程.

解　所给平面$x-2y+3z-5=0$的法向量为$\boldsymbol{n}=\{1，-2，3\}$，因为所求平面与该平面平行，所以所求平面的法向量也是$\boldsymbol{n}=\{1，-2，3\}$.

因为所求平面过点 M（1，–1，3），所以所求平面方程为

$$1\cdot(x-1)-2(y+1)+3(z-3)=0$$

即 $$x-2y+3z-12=0$$

例 4　如图 4-19 所示，求过三点 M_1（a，0，0）、M_2（0，b，0）、M_3（0，0，c）的平面方程（其中 a，b，c 均不为零）.

解　设所求平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中 A、B、C、D 是待定常数．把已知三点的坐标分别代入上式，得方程组

$$\begin{cases}Aa+D=0\\Bb+D=0\\Cc+D=0\end{cases}$$

于是 $$A=-\frac{D}{a}，\ B=-\frac{D}{b}，\ C=-\frac{D}{c}$$

将上述结果代入所设平面方程并化简，得

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{4.9}$$

方程（4.9）称为**平面的截距式方程**，其中的 a、b、c 分别称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距.

例 5　将平面方程 $3x-2y+6z-12=0$ 化为截距式方程，并画出其图形.

解　由 $3x-2y+6z-12=0$，得

$$3x-2y+6z=12$$

故所求为

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{2}=1$$

方程 $3x-2y+6z-12=0$ 的图形如图 4-20 所示.

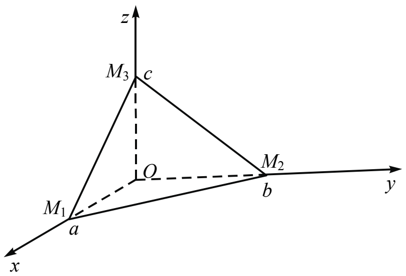


图 4-19

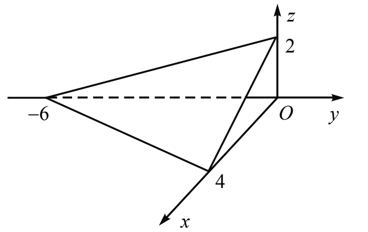


图 4-20

下面给出方程（4.7）的一些特殊情形：

（1）如果 $D=0$，那么方程（4.7）变为 $Ax+By+Cz=0$，由于点（0，0，0）满足方程，故它表示通过原点的平面，如图 4-21（a）所示.

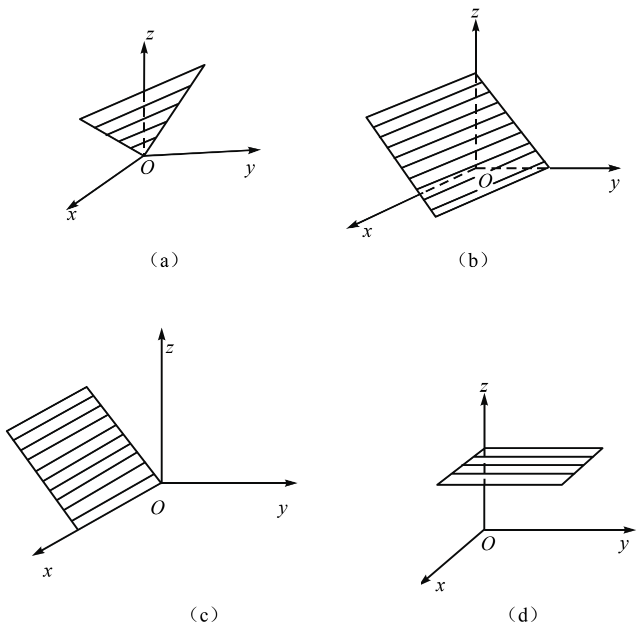


图 4-21

（2）如果 $A=0$，那么方程（4.7）变为 $By+Cz+D=0$，由于其法线向量 $\boldsymbol{n}=\{0, B, C\}$ 垂直于 x 轴，故它表示平行于 x 轴的平面，如图 4-21（b）所示；如果同时满足条件 $D=0$，那么方程（4.7）变为 $By+Cz=0$，它表示通过 x 轴的平面，如图 4-21（c）所示.

同理，平行于 y 轴或 z 轴的平面方程分别为 $Ax+Cz+D=0$、$Ax+By+D=0$；通过 y 轴或 z 轴的平面方程分别为 $Ax+Cz=0$，$Ax+By=0$.

（3）如果 $A=0$，$B=0$，那么方程（4.7）变为 $Cz+D=0$，即 $z=-\dfrac{D}{C}$，由于平面平行于 x 轴及 y 轴，故该平面平行于 xOy 面，如图 4-21（d）所示；如果同时满足条件 $D=0$，那么方程（4.7）变为 $z=0$，它表示 xOy 面.

同理，方程 $Ax+D=0$ 或 $By+D=0$ 分别表示平行于 yOz 面、xOz 面的平面；方程 $x=0$ 或 $y=0$ 分别表示 yOz 面、xOz 面.

例 6　描绘出下列方程所表示的平面.

（1）$y=3$；　　　（2）$x+y=1$.

解　（1）方程 $y=3$ 表示过点（0，3，0）且与 xOz 面平行的平面，如图 4-22（a）所示.

（2）方程 $x+y=1$ 表示过点（1，0，0）和（0，1，0）且与 z 轴平行的平面，如图 4-22（b）所示.

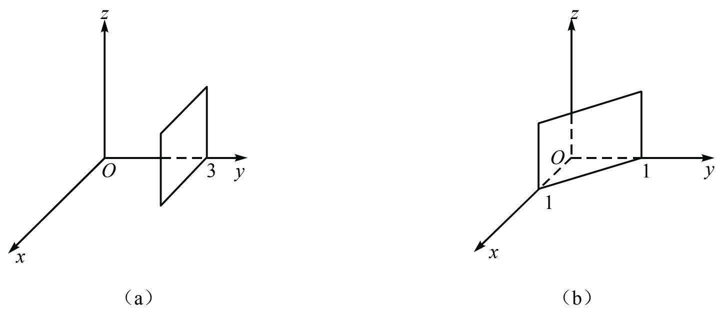


图 4-22

4.3.2　空间直线的方程

1．直线的一般式方程

空间直线 L 可以看成是两个平面 π_1 和 π_2 的交线，如图 4-23 所示.

设平面 π_1 和 π_2 相交，它们的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则它们的交线 L 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{4.10}$$

方程组（4.10）称为**空间直线的一般式方程.**

2．直线的点向式方程与参数方程

如果一非零向量 $\boldsymbol{s}$ 与直线 L 平行，那么向量 $\boldsymbol{s}$ 称为**直线 L 的方向向量**.

如果已知直线 L 上一定点 M_0（x_0，y_0，z_0）和其方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$，如图 4-24 所示，那么由立体几何知识知道，该直线 L 就完全确定了，现在来建立直线 L 的方程.

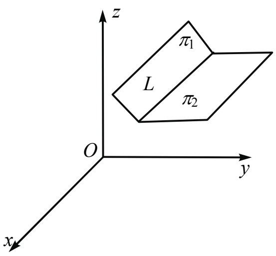


图 4-23

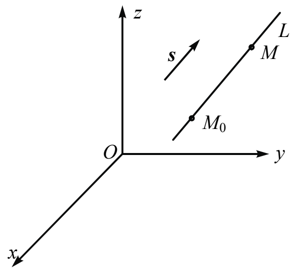


图 4-24

设 M（x，y，z）为直线 L 上的任意一点，作向量 $\overrightarrow{M_0M}$，则 $\overrightarrow{M_0M} /\!/ \boldsymbol{s}$，如图 4-24 所示. 因为 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$，$\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$，由两非零向量平行的充要条件，得

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{4.11}$$

式（4.11）称为**空间直线的点向式方程**.

注意

如果 m，n，p 中有一个或两个为 0 时，那么应理解为相应的分子也为 0.

对于直线的点向式方程（4.11），如果令

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

那么

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \tag{4.12}$$

称为**空间直线的参数式方程**，其中 t 为参数.

例 7　已知直线过点 M_0（2，−3，1），方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{3, -5, 4\}$，求该直线的点向式方程和参数式方程.

解　直线的点向式方程为 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z-1}{4}$

参数式方程为

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3-5t \\ z=1+4t \end{cases}$$

其中 t 为参数.

例 8　求过 A（x_1，y_1，z_1），B（x_2，y_2，z_2）两点的直线方程.

解　作向量 $\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 为该直线的方向向量，且

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$$

由直线的点向式方程，得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

例 9　求过点 M_0（1，2，−1）且平行于直线 L：$\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$ 的直线方程.

解　直线 L 是平面 π_1：$x+y-2z-1=0$ 与平面 π_2：$x+2y-z+1=0$ 的交线，而 π_1 和 π_2

的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{1,1,-2\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{1,2,-1\}$. 设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，则 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_1$ 且 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_2$，所以

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\{3,\ -1,\ 1\}$$

因此，过点 M_0（1，2，−1）且平行于直线 L 的直线方程为

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$$

练习 4.3

1．求下列各平面的方程.

（1）过点（1，0，−1），法向量为 $\boldsymbol{n}=\{-1,\ 2,\ 3\}$；

（2）过点（1，1，1），且与平面 $2x-6y-z+12=0$ 平行；

（3）在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为 1，2，3.

2．满足下列条件的平面，其方程有何特点？

（1）过原点；　（2）平行于 x 轴；　（3）平行于 xOy 面

3．求平面 $5x+3y-15z+15=0$ 在各坐标轴上的截距.

4．求下列各直线的方程.

（1）过点（5，−7，4），其方向向量为 1，$\sqrt{2}$，−1；

（2）过两点 A（2，0，−1）和 B（1，2，−2）；

（3）过点（3，−4，5），且与平面 $3x-2y+6z-4=0$ 垂直.

4.4　几种常见曲面与空间曲线的方程

4.4.1　几种常见曲面的方程

1．球面的标准方程

设球的球心在点 M_0（x_0，y_0，z_0），半径为 R，如图 4-25 所示，那么球面上任意一点 M（x，y，z）与点 M_0（x_0，y_0，z_0）的距离 $|M_0M|$ 为 R，根据空间两点间距离公式，得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{4.13}$$

显然球面上任一点满足方程（4.13）. 反之，如果点 M（x，y，z）不在球面上，那么点 M 的坐标不满足方程（4.13），所以方程（4.13）就是球心在点 M_0（x_0，y_0，z_0），半径为 R 的**球面的标准方程**.

特殊地，球心在原点（0，0，0）时，球面标准方程为：$x^2+y^2+z^2=R^2$.

例 1　讨论方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4=0$ 所表示的图形.

解　所给方程可以化为

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=1$$

该方程表示的是以点（1，–2，0）为球心，1 为半径的球面.

2．椭球面的方程

方程
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0，b>0，c>0) \tag{4.14}$$
所表示的曲面称为**椭球面**，如图 4-26 所示.

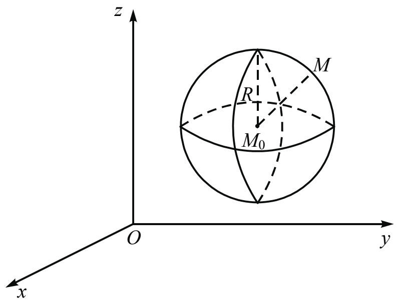


图 4-25

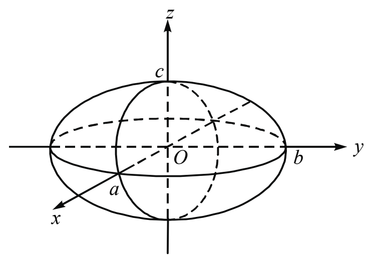


图 4-26

3．母线平行于坐标轴的柱面的方程

平行于定直线 l 的动直线 L，沿着定曲线 C（C 与 l 不在同一平面上）移动所形成的曲面称为**柱面**，如图 4-27 所示，动直线 L 称为**柱面的母线**，定曲线 C 称为**柱面的准线**.

例 2　已知一柱面的母线平行 z 轴，准线是 xOy 面内的圆 $x^2+y^2=R^2$，如图 4-28 所示．求该柱面的方程.

解　设柱面上任一点 M 的坐标为（x，y，z），过点 M 作平行于 z 轴的直线 L，当直线 L 平行 z 轴并沿准线绕 z 轴转一周后，动点 M 便形成一个以 O_1（0，0，z）为圆心，R 为半径的圆，且 $|O_1M|=R$.

因为　$|O_1M|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}$

所以　$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=R$

于是　$x^2+y^2=R^2$

上式就是所求的柱面方程.

需要指出的是，在平面直角坐标系 xOy 中方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示以原点 O 为圆心、R 为半径的圆．但在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，方程 $x^2+y^2=R^2$ 却不再表示一个圆，而是表示一个柱面，该柱面称为**圆柱面**．这就像方程 $y=4$ 在平面直角坐标系 xOy 中表示一条直线，而在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中就不再表示一条直线而是表示一个平面一样.

一般地，如果一个关于 x，y 的二元方程 $F(x，y)=0$ 在平面直角坐标系 xOy 中的图形是一条曲线 C，那么在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的图形就是一个柱面，这个柱面的母线平行 z 轴，准线是 xOy 面内的曲线 C，如图 4-29 所示．例如，下列方程
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1，\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1，\quad x^2=2py$$
所表示的图形都是母线平行 z 轴的柱面，如图 4-30 所示，它们分别称为**椭圆柱面**、**双曲柱面**、**抛物柱面**.

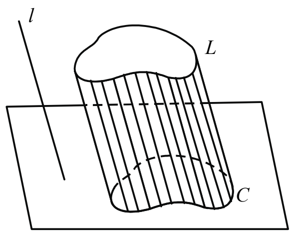


图 4-27

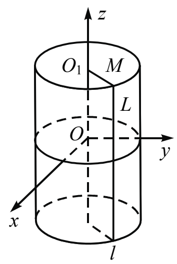


图 4-28

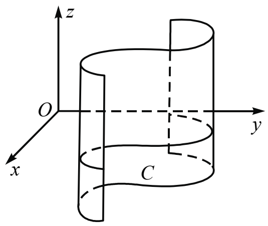


图 4-29

上面讨论了母线平行于 z 轴的柱面的方程，这种方程的特征是不含变量 z. 同理，如果方程不含变量 x 或 y，那么这方程在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中就表示母线平行于 x 轴或 y 轴的柱面.

4．以坐标轴为旋转轴的旋转曲面的方程

平面曲线 Γ 绕同一平面内的定直线 L 旋转一周所形成的曲面称为**旋转曲面**，定直线 L 称为**旋转曲面的轴**，曲线 Γ 称为**旋转曲面的母线**.

设在 yOz 面上有一已知曲线 Γ，其方程为 $f(y，z)=0$，把这曲线绕 z 轴旋转一周，便得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面，如图 4-31 所示，下面求它的方程.

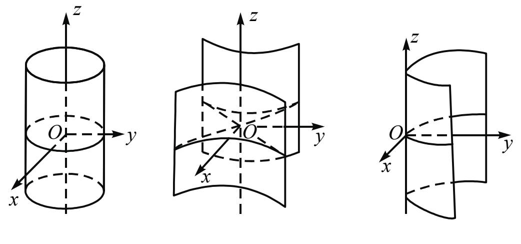


图 4-30

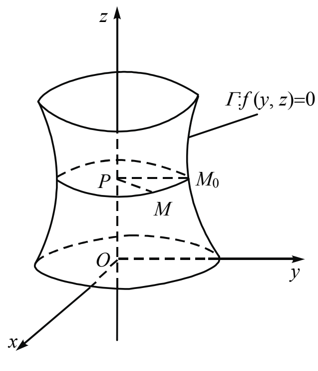


图 4-31

设点 $M(x，y，z)$ 为旋转曲面上任一点，它的原始位置在曲线 Γ 上的点 $M_0(0，y_0，z_0)$. 当曲线 Γ 绕 z 轴旋转时，点 M_0 也绕 z 轴旋转到点 M，这时点 M_0 的轨迹是 $z=z_0$ 平面上半径为 $|y_0|$ 的圆，即点 M 坐标满足

$$z=z_0，\sqrt{x^2+y^2}=|y_0| \qquad (4.15)$$

因为点 M_0 在 Γ 上，所以 $f(y_0，z_0)=0$，式将（4.15）代入 $f(y_0，z_0)=0$，则得所求旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}，z)=0$$

由上式可以看出，只要将 yOz 面上的曲线 Γ 的方程 $f(y，z)=0$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，就得到曲线 Γ 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

同理，曲线 Γ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

例 3　yOz 面上的直线 $z=ky$（$k\neq 0$）绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面称为**圆锥面**，如图 4-32 所示．求该圆锥面的方程．

解　将 z 保持不变，y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，则有

$$z=k(\pm\sqrt{x^2+y^2})$$

上式两边平方，得所求圆锥面方程为

$$z^2=k^2(x^2+y^2)$$

例 4　yOz 面上的抛物线 $y^2=2pz$ 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面称为**旋转抛物面**，如图 4-33 所示．求该旋转抛物面的方程．

解　将 z 保持不变，y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，则有

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2=2pz$$

即所求旋转抛物面方程为

$$x^2+y^2=2pz$$

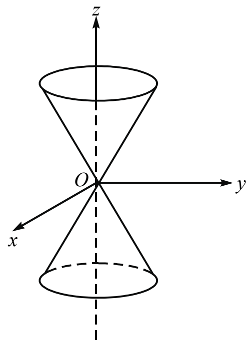


图 4-32

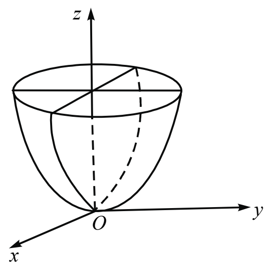


图 4-33

例 5　xOy 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面称为**旋转椭球面**，如图 4-34 所示．求该旋转椭球面的方程．

解　将 y 保持不变，x 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，则所求旋转椭球面方程为

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

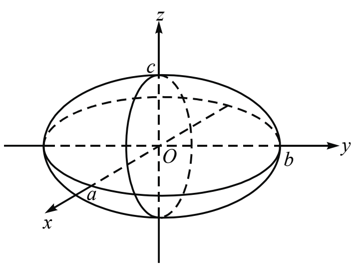


图 4-34

4.4.2 几种常见空间曲线的方程

1．空间曲线的一般式方程

空间曲线Γ可以看做两个曲面Σ_1和Σ_2的交线，如图 4-35 所示.

设曲面Σ_1和Σ_2相交，它们的方程分别为$F(x, y, z)=0$和$G(x, y, z)=0$，如果这两个曲面相交，则它们的交线Γ的方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases} \tag{4.16}$$

方程组（4.16）称为**空间曲线的一般式方程**.

例 6 方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=2 \end{cases}$表示怎样的曲线？

解 因为$x^2+y^2+z^2=9$表示球心在原点、半径为 3 的球面，$z=2$是过点（0，0，2）且平行于xOy面的平面，所以要求的曲线是球面与平面的交线——圆，如图 4-36 所示.

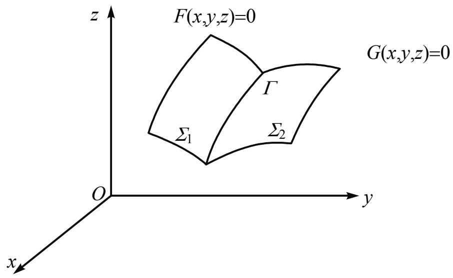


图 4-35

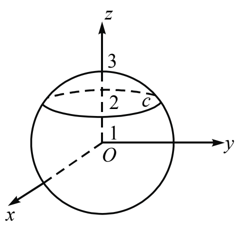


图 4-36

2．空间曲线的参数方程

引例 某架飞机从甲城飞往乙城，如果将空中的飞机看做一个动点M，那么该飞机在空中的飞行曲线可看做动点M运动的轨迹，显然，动点M的坐标（x，y，z）与时间t有关，是时间t的函数.

设空间曲线Γ上动点M的坐标（x，y，z）可表示为参数t的函数：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{4.17}$$

当给定$t=t_1$时，就得到Γ上一个点M_1（x_1，y_1，z_1）；随着t的变动便可以得到曲线Γ上的全部点，则方程组（4.17）称为**空间曲线的参数方程**，其中t为参数.

例 7 设空间一点M（x，y，z）在圆柱面$x^2+y^2=R^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿z轴正向上升（其中ω，v是常数），则动点M运动的轨迹称为**螺旋线**，如图 4-37 所示，试建立其参数方程.

解 取时间t为参数，设当$t=0$时，动点位于x轴上一点A（R，0，0）. 经过时间t，动点由A运动到点M（x，y，z）. 从M作xOy面的垂线与xOy面交于M_1，显然M_1的坐标为（x，y，0）. 由于动点在圆柱面上以角速度ω绕z轴旋转，那么经过时间t，$\angle AOM_1=\omega t$，

从而

$$\begin{cases} x = OM_1 \cos\angle AOM_1 = R\cos\omega t \\ y = OM_1 \sin\angle AOM_1 = R\sin\omega t \end{cases}$$

又因为动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的方向上升，所以

$$z = M_1M = vt$$

故螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$

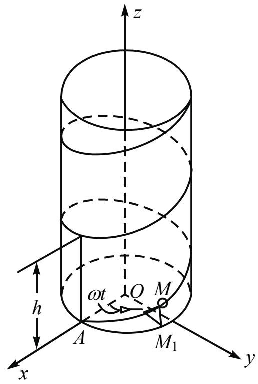


图 4-37

也可以用其他变量做参数．例如，令 $\theta = \omega t$，则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

其中 $b = \dfrac{v}{\omega}$，θ 为参数．

螺旋线在实际应用尤其机加工中经常用到．例如，平头螺丝的外缘曲线就是螺旋线．螺旋线有一个重要性质：

当 θ 从 θ_0 变到 $\theta_0 + \alpha$ 时，z 由 $b\theta_0$ 变到 $b\theta_0 + b\alpha$，这说明当 OM_1 转过角 α 时，点 M 沿螺旋线上升了高度 $b\alpha$，即上升的高度与 OM_1 转过的角度 α 成正比，特别是当 OM_1 转过一周，即 $\alpha = 2\pi$，点 M 就上升固定高度 $h = 2\pi b$，这个高度称为螺距．

练习 4.4

1．方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 4z = 0$ 表示什么曲面？

2．在空间中，下列方程分别表示什么图形．

（1）$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$；　（2）$x^2 + y^2 = 9$；　（3）$y^2 = 6x$；

（4）$x^2 - y^2 = 1$；　（5）$\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

3．将 yOz 面上的圆 $y^2 + z^2 = 16$ 绕 z 轴旋转一周，求所形成曲面的方程．

4．将 zOx 面上的抛物线 $z^2 = 12x$ 绕 x 轴旋转一周，求所形成曲面的方程．

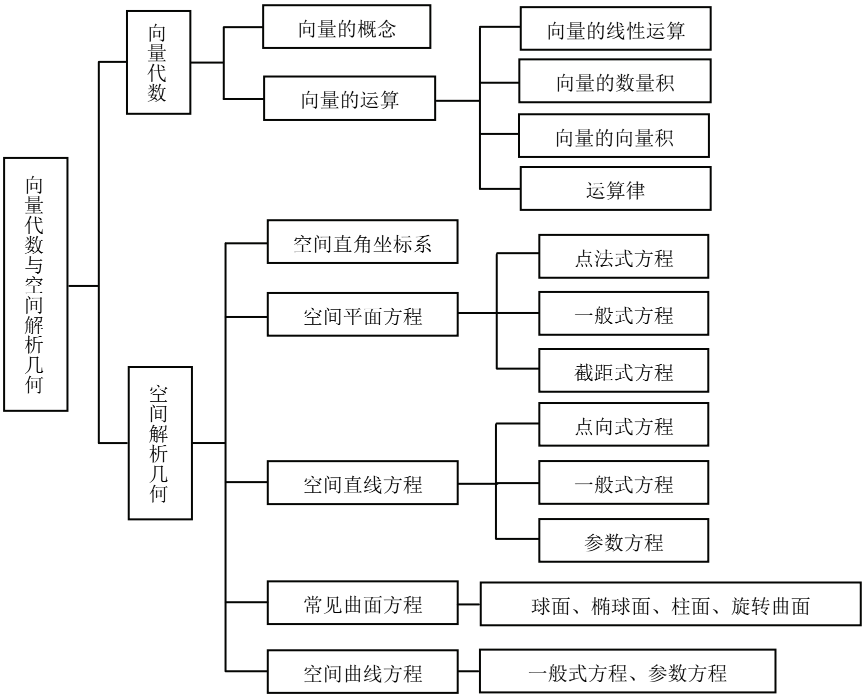
5．说明下列旋转曲面是怎样形成的．

（1）$\dfrac{x^2 + y^2}{12} + \dfrac{z^2}{9} = 1$；　（2）$x^2 - \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

6．说出下列方程组分别表示怎样的曲线．

（1）$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ z = 3 \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

本章知识结构图


向量代数与空间解析几何
向量代数
向量的概念
向量的运算
向量的线性运算
向量的数量积
向量的向量积
运算律
空间解析几何
空间直角坐标系
空间平面方程
点法式方程
一般式方程
截距式方程
空间直线方程
点向式方程
一般式方程
参数方程
常见曲面方程
球面、椭球面、柱面、旋转曲面
空间曲线方程
一般式方程、参数方程

数学史话 5

柯西（A.L.Cauchy，1789—1851，法国数学家）

经过近一个世纪的尝试与酝酿，数学家们在严格化基础上重建微积分的努力到 19 世纪初开始获得成效. 19 世纪分析严格化真正有影响的先驱是法国数学家柯西.

柯西长期担任巴黎综合工科学校教授，他有许多著作都是以工科大学讲义形式面世的. 在分析方法方面，他写出了一系列著作，其中最有代表性的是《分析教程》(Coursd、analyse de l、Ecole polytechnique，1821)和《无限小计算教程概论》(Resume des lecons donnees a l、Ecole Royale polytechnique sur les calcul infinitesimal，1823)，他以严格化为目标，对微积分的基本概念，如变量、函数、极限、连续性、导数、微分、收敛等给出了明确的定义，并在此基础上重建和拓展了微积分的重要事实与定理.

柯西的工作向分析的全面严格化迈出了关键的一步. 他的许多定义和论述已经相当接近于微积分的现代形式，像微积分基本定理，几乎与今天的教科书完全一样（区别仅在于现代教科书中为了区别积分号下的哑变量与上限变量，往往将 $f(x)\mathrm{d}x$ 换成 $f(t)\mathrm{d}t$）. 柯西的研究结果一开始就引起了科学界很大的轰动. 据说柯西在巴黎科学院宣读第一篇关于级数收敛性的论文时，使德高望重的拉普拉斯大感困惑，会后急忙赶回家去检查他那五大卷《天体力学》里的级数，结果发现他所用到的级数幸好都是收敛的. 而同一个拉普拉斯，当有一次拿破仑问他为什么五大卷《天体力学》中没有一处提到上帝时，曾傲然答道："陛下，我不需要这样的假设！"

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

第 5 章　二元函数微积分

前面我们讨论了一元函数微分学和积分学，但在日常生活与工作、工程技术中常常遇到含有两个或更多自变量的函数，即多元函数．本章将在一元函数微分学和积分学的基础上，讨论多元函数的微积分及其应用，讨论时以二元函数为主，因为自变量的个数更多时，在理论上并没有原则性的区别，二元函数的所有理论和公式都很容易推广到一般的多元函数．在学习时要特别注意一元函数和二元函数在内容和方法上的相同点和不同点，以便更好地掌握二元函数微积分．

5.1　二元函数的基本概念

5.1.1　二元函数的定义

1．引例

引例 1　圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有如下关系

$$V=\pi r^2 h \qquad (r>0,\ h>0)$$

这里 $r>0$，$h>0$ 是变量 r、h 的变化范围，体积 V 随着 r、h 的变化而变化，当 r、h 在各自的变化范围内独立地取定一个数值 r_0、h_0，即取定一对值（r_0，h_0）时，V 就有一个确定的值 $V_0=\pi r_0^2 h_0$ 与之对应．

引例 2　在直流电路中，电流 I 和电压 V、电阻 R 具有如下关系

$$I=\frac{V}{R} \qquad (V\geqslant 0,\ R>0)$$

电流 I 随着电压 V、电阻 R 的变化而变化，当 V、R 在各自的变化范围内独立地取定一个数值 V_0、R_0，即取定一对值（V_0、R_0）时，I 就有一个确定的值 $I_0=\dfrac{V_0}{R_0}$ 与之对应．

以上两个引例的具体意义虽然不同，但实质却是一样的，即在每个问题中都涉及三个变量，其中一个变量随着另两个变量的变化而变化，于是得出二元函数的定义．

2．二元函数的定义

定义 5.1　设有三个变量 x、y、z，如果对于变量 x、y 在它们的变化范围内所取的每一对值，变量 z 按照一定的规律，总有确定的值与之对应，那么 z 称为 x、y 的二元函数，记做

$$z=f(x,\ y) \quad \text{或} \quad z=z(x,\ y)$$

其中 x、y 称为自变量，函数 z 称为因变量．自变量 x、y 的变化范围称为函数的定义域，用 D 表示．

当自变量 x、y 分别取 x_0、y_0 时，函数 z 的对应值 z_0 称为二元函数 $z=f(x，y)$，当 $x=x_0$、$y=y_0$ 时的函数值，记做 $z_0=f(x_0，y_0)$．函数 z 的值的集合称为值域，用 M 表示．

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x，y，z)$以及三元以上的函数．

二元及二元以上的函数称为多元函数．

需要说明的是：对于由实际问题建立的函数，可根据实际问题来确定函数的定义域，例如，引例 1 中 $r>0$，$h>0$，引例 2 中 $V\geqslant 0$，$R>0$．对于用解析式表示的二元函数 $z=f(x，y)$的定义域，就以使这个函数解析式有意义的点（x，y）的集合作为函数的定义域．

例 1 求二元函数 $f(x，y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的定义域，并求 $f(1，0)$．

解 依题意 x，y 必须满足不等式 $4-x^2-y^2\geqslant 0$，即 $x^2+y^2\leqslant 4$．

因为 $x^2+y^2=4$ 是 xOy 面上以原点为圆心，2 为半径的圆，所以函数的定义域是以原点为圆心，2 为半径的圆及其内部的点集合，如图 5-1 所示．并且

$$f(1，0)=\sqrt{4-1^2-0^2}=\sqrt{3}$$

例 2 求函数 $f(x，y)=\ln(x-y)$ 的定义域，并求 $f(\mathrm{e}+1，1)$，$f(x+2，y+4)$．

解 依题意，x、y 必须满足不等式 $x-y>0$．

故函数的定义域是 xOy 面上直线 $y=x$ 下方的半平面（不包括该直线在内），如图 5-2 所示．并且

$$f(\mathrm{e}+1，1)=\ln(\mathrm{e}+1-1)=\ln\mathrm{e}=1$$
$$f(x+2，y+4)=\ln[x+2-(y+4)]=\ln(x-y-2)$$

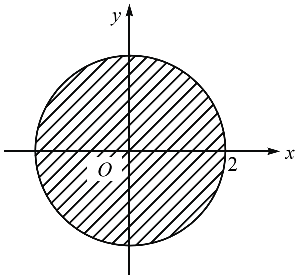


图 5-1

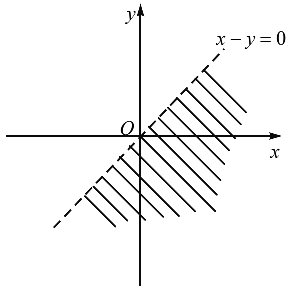


图 5-2

例 3 求函数 $z=4\sqrt{x+y}-\lg(x-y+3)$ 的定义域．

解 由已知的函数表达式看出，自变量 x 与 y 必须同时满足下列不等式

$$x+y\geqslant 0，\quad x-y+3>0$$

$x+y\geqslant 0$ 即 $y\geqslant -x$．$y=-x$ 是 xOy 面上的一条直线，$y\geqslant -x$ 就是这直线上方的半个平面，由于有等号，因此还包括直线上的点，这个图形记做 D_1．

$x-y+3>0$ 是 xOy 面上直线 $x-y+3=0$ 下方的半个平面，由于没有等号，因此不包括直线上的点，这个图形记做 D_2．

图形 D_1 与 D_2 的公共部分 D，如图 5-3 所示，就是所求的定义域．

从上面三个例子可以看出，二元函数的定义域一般是由一条或几条曲线围成的平面的一部分，称为**平面区域**．如果某区域总可以被包围在一个以原点为圆心而半径适当大的圆内，那么该区域称为**有界区域**．如果这样的圆不存在，即区域可以延伸到无限远，那么该区域称

为**无界区域**，例如，例 1 的定义域是有界区域，例 2、例 3 的定义域是无界区域．围成区域的曲线称为它的**边界**，包含全部边界的区域，称为**闭区域**，不包含边界的区域称为**开区域**，例如，例 1 的定义域是闭区域，例 2 的定义域是开区域，例 3 的定义域既不是开区域也不是闭区域．

3．二元函数的几何意义

我们知道，在平面直角坐标系 xOy 内，一元函数 $y=f(x)$ 一般表示一条曲线．而在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，二元函数 $z=f(x,y)$ 一般表示一张曲面．

设函数 $z=f(x,y)$，其定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 定义域中的一点，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 对应的函数值记为 $z_0=f(x_0,y_0)$，于是在空间直角坐标系中可以作出点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$．一般地，当点 $P(x,y)$ 在定义域 D 内变动时，对应点 $M(x,y,z)$ 的轨迹就是 $z=f(x,y)$ 的几何图形，通常是一张曲面，这个曲面称为函数 $z=f(x,y)$ 的图形，如图 5-4 所示，而定义域 D 正是该曲面在 xOy 面上的投影．

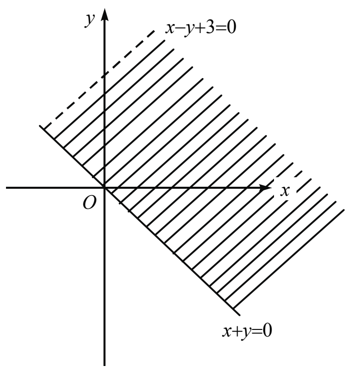


图 5-3

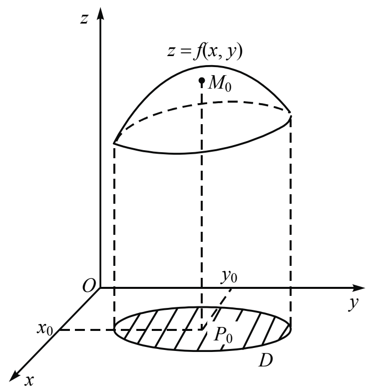


图 5-4

例 4　作出二元函数 $z=1-x-y$ 的图形．

解　函数的定义域为坐标平面 xOy，由空间解析几何可知，它的图形是一张平面，该平面在三个坐标轴上的截距均为 1，其图形在第一卦限的部分，如图 5-5 所示．

例 5　作函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形．

解　函数的定义域为 $x^2+y^2\leqslant 1$，它的图形是球心在原点，半径为 1 的上半球面，如图 5-6 所示．

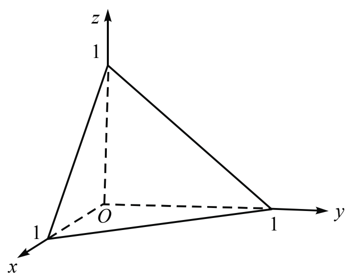


图 5-5

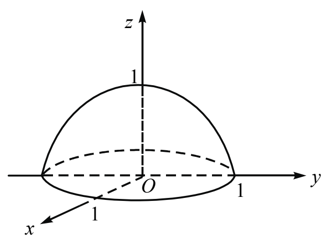


图 5-6

5.1.2　二元函数的极限

二元函数 $z=f(x,y)$的极限，就是研究当自变量 x、y 无限趋近于一组定数 x_0、y_0，即点 $P(x,y)$ 趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数值 $f(x,y)$的变化趋势．由于二元函数有两个自变量，因此，它的自变量的变化过程要比一元函数的自变量的变化过程复杂得多．在平面上，点 $P(x,y)$ 趋近于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的路径可以是多种多样的，但不管采取哪种路径，只要点 $P(x,y)$ 趋近于定点 $P_0(x_0,y_0)$，那么动点 $P(x,y)$ 与定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离 $\rho=|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 就必然趋于零．因此，总可以用 $\rho\to 0$ 表示 $P(x,y)$ 趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的变化过程．为此，先给出平面上点的邻域的概念：

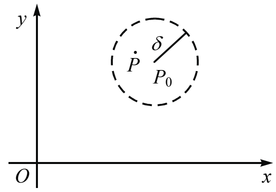


图 5-7

设δ是某一很小的正数，以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心，δ为半径的开圆域称为**点 P_0 的δ邻域**，如图 5-7 所示，它表示与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于δ的点 $P(x,y)$ 的全体，即点集

$$\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

定义 5.2　设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义（但点 P_0 可除外），如果当动点 $P(x,y)$ 沿任意路径趋近于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数值 $f(x,y)$都无限趋近于一个确定的常数 A，那么常数 A 称为函数 $z=f(x,y)$当 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 时的极限，记做

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$．此时也称为 $z=f(x,y)$当 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 时的极限存在．

例 6　讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 当 $P(x,y)\to O(0,0)$时的极限是否存在．

解　当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴即直线 $y=0$ 趋于点 $O(0,0)$（此时 $y=0$，$x\to 0$ 但 $x\neq 0$）时，有

$$f(x,y)=f(x,0)=\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=0$$

并且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 0=0$$

同理，当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴即直线 $x=0$ 趋于点 $O(0,0)$（此时 $x=0$，$y\to 0$ 但 $y\neq 0$）时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 0=0$$

当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于点 $O(0,0)$（此时 $y=x$，$x\to 0$ 但 $x\neq 0$）时，有

$$f(x,y)=f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

由于点 (x,y) 沿不同路径趋于点 $O(0,0)$ 时，函数不趋近同一个常数，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$

不存在．

从上面的例 6 可以看到，二元函数的极限要比一元函数的极限复杂得多．对于一元函数，如果 x 从点 x_0 左侧趋于 x_0 与从点 x_0 右侧趋于 x_0 的极限存在且相等，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，其逆命题也为真．而二元函数的极限存在，是指当点 P（x，y）沿任意路径趋于定点 P_0（x_0，y_0）时，函数都无限趋近唯一常数 A．因此，当点 P（x，y）沿某些特殊路径，例如，沿着一条或几条直线或曲线趋于 P_0（x_0，y_0）时，尽管函数 $z = f(x，y)$都无限接近于同一个常数（如例 6 沿 x 轴、y 轴，极限都为 0)，我们仍然不能由此断定函数的极限存在．但是，当动点 P（x，y）以不同路径趋于 P_0（x_0，y_0）点时，如果函数趋于不同的值，那么就可以断定函数在点 P_0（x_0，y_0）的极限不存在．

5.1.3　二元函数的连续性

类似于一元函数连续的定义，下面给出二元函数连续性的定义．

定义 5.3　设函数 $z = f(x，y)$在点 P_0（x_0，y_0）的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x，y)$ 存在且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x，y)=f(x_0，y_0)$，那么称函数 $z = f(x，y)$在点 P_0（x_0，y_0）处连续，而点 P_0（x_0，y_0）称为函数 $z = f(x，y)$的连续点．

如果 $z = f(x，y)$在点 P_0（x_0，y_0）无定义或 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x，y)$不存在或 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x，y) \neq f(x_0，y_0)$，那么函数 $z = f(x，y)$在点 P_0（x_0，y_0）处不连续，点 P_0（x_0，y_0）称为函数 $z = f(x，y)$的间断点或不连续点．

例 7　由例 6 知函数 $f(x，y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}， & x^2+y^2 \neq 0； \\ 0， & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 当 $P(x，y) \to O(0，0)$时，极限不存在，故原点 O（0，0）是该函数的间断点．

例 8　函数 $f(x，y)=\dfrac{10}{x^2+y^2-9}$ 在什么地方间断？

解　因为当 $x^2+y^2-9=0$ 时，函数无定义，所以该函数在圆 $x^2+y^2=9$ 上间断．

由此可见，二元函数不但有间断点，还有间断线．

定义 5.4　如果函数 $z = f(x，y)$在区域 D 内每一点都连续，那么称函数 $z = f(x，y)$在区域 D 内连续．该区域 D 称为函数的连续区域．

二元连续函数 $z = f(x，y)$的图形在几何上表示为一张无孔、无裂缝的曲面．

与一元函数类似，把由含自变量 x、y 的基本初等函数和常数经过有限次的四则运算与复合步骤构成的，并且是用一个数学式子表示的二元函数称为二元初等函数．

例如，$z=\dfrac{xy-3}{x^2+y^2}$，$z=\mathrm{e}^{x+y}-\ln(1+y^3)$ 都是二元初等函数．

与一元函数类似，一切二元初等函数在其定义区域内连续．利用此结论可以求二元初等函数的连续区域和定义区域内部点处的极限．

例 9　已知函数 $f(x，y)=\dfrac{x+y}{xy}$，求 $f(x，y)$的连续区域和 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f(x，y)$．

解 函数 $f(x, y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是初等函数，其定义域即连续区域为 $xy\neq 0$，即 xOy 面内的四个象限.

因为点（1，2）在第一象限内为连续区域内的点，所以函数在点（1，2）连续，故由连续的定义，得

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{x+y}{xy}=f(1, 2)=\frac{3}{2}$$

例 10 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

练习 5.1

1．设 $\varphi(x, y)=(x+y)^{x-y}$，求 φ（0，1）、φ（−1，−1）、φ（2，3）.

2．求下列函数的定义域，并画出定义域的图形.

（1）$z=\dfrac{xy}{x-y}$； （2）$z=\ln(x+y)$；

（3）$z=\sqrt{xy}$； （4）$z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

3．讨论二元函数 $f(x, y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ 当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时的极限是否存在.

4．指出下列函数在何处间断.

（1）$z=\ln(x^2+y^2)$； （2）$z=\dfrac{1}{y^2-2x}$.

5．已知函数 $f(x, y)=\dfrac{x+y}{x-y}$，求 $f(x, y)$的连续区域和 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y)$.

6．已知函数 $f(x, y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$，求 $f(x, y)$的连续区域和 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} f(x, y)$.

7．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$； （2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$.

5.2 偏导数与全微分

5.2.1 偏导数的定义及计算

1．偏导数的概念

在研究一元函数时，我们已经知道了变化率（即导数）的重要性．对于二元函数 $z=f(x, y)$，

同样需要讨论它的变化率.

引例 气缸内理想气体的体积 V 是温度 T 与压强 p 的函数，即 $V=RT/p$，其中 R 是常数．要了解 T、p 变化时 V 的变化情况，就要分析 T、p 变化时，V 变化的快慢问题（即变化率问题）．由于自变量有两个，因此因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多，那么我们应当怎样研究它的变化率呢？方法是将两个自变量中的一个暂时看做不变，去研究因变量对另一个自变量的变化率．例如，暂时把 T 看做常量，即在等温过程中，求体积 V 对 p 的变化率，这时 V 是自变量 p 的一元函数，因而求 V 对 p 的变化率就转化为计算一元函数的导数了．根据一元函数的求导法，可求出 V 对 p 的变化率为 $-RT/p^2$．

同理，暂时把 p 看做常量，即在等压过程中，V 是自变量 T 的一元函数，可求出 V 对 T 的变化率为 R/p．

一般地，对于二元函数 $z=f(x,y)$，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 保持不变（看做常量），这时函数 z 就是 x 的一元函数，此时 z 对 x 的导数，称为二元函数 z 对 x 的偏导数；类似地，如果只有自变量 y 变化，而自变量 x 保持不变（看做常量），这时函数 z 就是 y 的一元函数，此时 z 对 y 的导数，称为二元函数 z 对 y 的偏导数，下面给出偏导数的定义.

定义 5.5 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点（x，y）的某一邻域内有定义，当自变量 y 保持不变（看做常量）时，z 对 x 的导数（导数要存在），即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

称为函数 $z=f(x,y)$ 在点（x，y）对 x 的偏导数，记做 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$，$f'_x(x,y)$ 或 z'_x．

当自变量 x 保持不变（看做常量）时，z 对 y 的导数（导数要存在），即极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

称为函数 $z=f(x,y)$ 在点（x，y）对 y 的偏导数，记做 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$，$f'_y(x,y)$ 或 z'_y．

根据偏导数的定义，求二元函数偏导数的方法与一元函数的求导方法完全一样，所有一元函数的求导公式和求导法则都能应用，但要切记求导时务必把另一个自变量暂时看做常量.

例 1 设函数 $f(x,y)=x^2+2xy-y^2$，求 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$.

解 求 $f'_x(x,y)$ 时，将 y 看做常量，函数 $f(x,y)$ 对 x 求导，得

$$f'_x(x,y)=2x+2y$$

求 $f'_y(x,y)$ 时，将 x 看做常量，函数 $f(x,y)$ 对 y 求导，得

$$f'_y(x,y)=2x-2y.$$

例 2 设函数 $z=x^y$（$x>0$，$x\neq 1$），求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 将 y 看做常量，函数 z 对 x 求导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$.

将 x 看做常量，函数 z 对 y 求导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

从上面两个例子可以看出，偏导数 $f'_x(x,y)$、$f'_y(x,y)$ 一般仍然是 x、y 的函数，所以它们又称为偏导函数，它们在点（x_0，y_0）处的函数值 $f'_x(x,y)|_{(x_0,y_0)}$、$f'_y(x,y)|_{(x_0,y_0)}$ 分别为

$z=f(x, y)$在点（x_0，y_0）对 x 或 y 的偏导数，$z=f(x, y)$在点（x_0，y_0）对 x 或 y 的偏导数分别记做$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$，$\left.\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$，$f'_x(x_0, y_0)$，$z'_x|_{(x_0, y_0)}$或$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$，$\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$，$f'_y(x_0, y_0)$，$z'_y(x_0, y_0)$，即

$$f'_x(x_0, y_0)=f'_x(x, y)|_{(x_0, y_0)},\quad f'_y(x_0, y_0)=f'_y(x, y)|_{(x_0, y_0)}.$$

例 3　求函数 $z=\mathrm{e}^{x^2-y^2}$ 在点（1，3）处的偏导数.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x^2-y^2}\ (x^2-y^2)'_x=2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{x^2-y^2}\ (x^2-y^2)'_y=-2y\mathrm{e}^{x^2-y^2}$

将点（1，3）代入上面两式，得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1, 3)}=2\cdot1\cdot\mathrm{e}^{1^2-3^2}=2\mathrm{e}^{-8},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1, 3)}=-2\cdot3\cdot\mathrm{e}^{1^2-3^2}=-6\mathrm{e}^{-8}$$

例 4　已知理想气体的状态方程为 $pV=RT$，其中 R 为常数，求 $\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p}$ 的值.

解　由状态方程为 $pV=RT$，得

$$p=\frac{RT}{V},\quad V=\frac{RT}{p},\quad T=\frac{pV}{R}$$

于是
$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$$

故
$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{Vp}=-1$$

上式说明，偏导数的记号是一个整体记号，不能看做分子、分母之商，这一点不同于一元函数 $y=f(x)$ 的导数记号 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 在本例中，偏导数 $\dfrac{\partial p}{\partial V}$、$\dfrac{\partial V}{\partial T}$、$\dfrac{\partial T}{\partial p}$ 都有其物理意义，如 $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ 表示等温过程中，气体的压强对体积的变化率；$\dfrac{\partial V}{\partial T}$ 表示等压过程中，气体的体积对温度的变化率.

例 5　已知三角形面积 S 与边 a,b 及其夹角 C 的三元函数关系式为 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，求 $\dfrac{\partial S}{\partial a}$，$\dfrac{\partial S}{\partial b}$，$\dfrac{\partial S}{\partial C}$.

解　求 $\dfrac{\partial S}{\partial a}$ 时，将 b，C 看做常量，函数 S 对 a 求导，得 $\dfrac{\partial S}{\partial a}=\dfrac{1}{2}b\sin C$.

同理，$\dfrac{\partial S}{\partial b}=\dfrac{1}{2}a\sin C$，$\dfrac{\partial S}{\partial C}=\dfrac{1}{2}ab\cos C$.

2．偏导数的几何意义

前面介绍了二元函数 $z=f(x, y)$的图形是空间一曲面，函数 z 对 x 的偏导数 $f'_x(x, y)$就是把 y 暂时固定，将 z 看成 x 的一元函数时的导数. 当 y 固定在 y_0 时，z 对 x 的依赖关系就是一元函数 $z=f(x, y_0)$，因此二元函数 $z=f(x, y)$在（x_0，y_0）处对 x 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$就

是一元函数 $z=f(x,\ y_0)$ 在 x_0 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x,\ y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$. 如图 5-8 所示，函数 $z=f(x,\ y_0)$ 的图形就是平面 $y=y_0$ 与曲面的交线 C_x，由导数的几何意义知：$f_x'(x_0,\ y_0)$ 就是曲线 C_x 在点 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处的切线对 x 轴的斜率，即

$$f_x'(x_0,\ y_0)=\tan\alpha$$

同理可知，$f_y'(x_0,\ y_0)$ 就是曲面与平面 $x=x_0$ 的交线 C_y 在点 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处的切线对 y 轴的斜率，即

$$f_y'(x_0,\ y_0)=\tan\beta$$

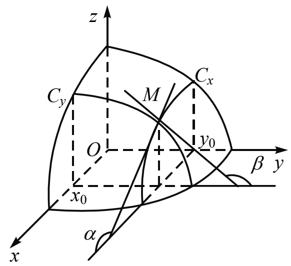


图 5-8

3．二阶偏导数

我们知道，函数 $z=f(x,\ y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,\ y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,\ y)$ 一般仍是 x、y 的函数，还可以进一步讨论它们关于自变量 x、y 的偏导数，如果 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的偏导数存在，那么这种偏导数的偏导数称为 $z=f(x,\ y)$ 的二阶偏导数．按照对变量求导次序的不同，共有以下四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x,\ y)=z_{xx}'',\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,\ y)=z_{xy}''$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''(x,\ y)=z_{yx}'',\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x,\ y)=z_{yy}''$$

其中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 叫做二阶混合偏导数．同样可以定义三阶、四阶、……、n 阶偏导数，二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数．

例 6 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$．

解 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$，$\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2$，$\quad\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1$，$\quad\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy$

值得注意的是，例 6 中的两个二阶混合偏导数相等，即 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，也就是说，这些混合偏导数与先对 x 还是先对 y 求导的顺序无关．但是，这个结论并不是对任意的函数都成立，而是有条件的．即

如果函数 $z=f(x,\ y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必然相等．

二阶混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关这一结论，可以推广到二元以上的函数

以及任意阶的混合偏导数.

5.2.2　全微分

1．全增量的定义及计算

前面研究了二元函数 $z=f(x,y)$的两个自变量中只有一个变化的情形，由一元函数微分学中增量和微分的关系，可得

$$f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)\approx f'_x(x,\ y)\Delta x$$

$$f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)\approx f_y'(x,\ y)\Delta y$$

上面两式的左端分别称为函数 $z=f(x,y)$对 x，y 的偏增量，而右端分别称为二元函数对 x，y 的偏微分.

在实际问题中，还会遇到二元函数的两个自变量同时都变化的情形，于是引入了函数全增量的概念：

如果二元函数 $z=f(x,y)$的两个自变量 x、y 分别取得增量 Δx、Δy，那么函数相应取得的增量称为全增量，记做 Δz，即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

2．全微分方程

定义 5.6　设函数 $z=f(x,y)$在点（x，y）的某一邻域内有定义，且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在，如果 $z=f(x,y)$在点（x，y）处的全增量 Δz 可表示为

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+o(\rho)$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，那么称为函数 $z=f(x,y)$在点（x，y）处可微，把 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$在点（x，y）处的全微分，记做 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

由此看出，全微分 $\mathrm{d}z$ 是全增量 Δz 的线性部分．当 ρ 很小时，$\Delta z\approx \mathrm{d}z$．

函数 $z=f(x,y)$在什么条件下可微呢？我们有如下的定理：

定理 5.1　如果函数 $z=f(x,y)$的两个偏导数在点（x，y）处连续，那么该函数在该点可微.

与一元函数一样，规定：$\Delta x=\mathrm{d}x$，$\Delta y=\mathrm{d}y$，于是全微分又可写成

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

二元函数全微分定义可以推广到三元和三元以上的多元函数.

例 7　求 $z=x^3y-3x^2y^3$ 的全微分.

解　因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-6xy^3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-9x^2y^2$

所以
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y=(3x^2y-6xy^3)\mathrm{d}x+(x^3-9x^2y^2)\mathrm{d}y$$

例 8 设 $z=\mathrm{e}^{xy}$，求：（1）全微分 $\mathrm{d}z$；（2）当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.01$，$\Delta y=0.02$ 时 $\mathrm{d}z$ 的值.

解 （1）因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^{xy}$$
所以
$$\mathrm{d}z= y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x+ x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y =\mathrm{e}^{xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$
（2）当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.01$，$\Delta y=0.02$ 时，
$$\mathrm{d}z= \mathrm{e}^{2\times1}(1\times0.01+2\times0.02)\approx0.369$$

例 9 求三元函数 $u=2x-y^2\cos z$ 的全微分.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y\cos z$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=y^2\sin z$

所以
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=2\,\mathrm{d}x-2y\cos z\,\mathrm{d}y+y^2\sin z\,\mathrm{d}z$$

5.2.3 复合函数偏导数的计算

设函数 z 是 u、v 的函数：$z=f(u,v)$，而 u、v 又是 x、y 的函数：$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，则函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 称为 x、y 的复合函数，u、v 称为中间变量，x、y 称为自变量.

可以用类似于求一元复合函数导数的方法，通过 $f(u,v)$ 的偏导数和 $\varphi(x,y)$，$\psi(x,y)$ 的偏导数求出函数 z 对自变量 x 或 y 的偏导数，具体见下面的定理：

定理 5.2 如果函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点（x，y）处都具有对 x、y 的偏导数，且在对应于（x，y）的点（u，v）处函数 $z=f(u,v)$ 有连续偏导数，那么复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点（x，y）处有对 x，y 的偏导数，并且
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\tag{5.1}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\tag{5.2}$$

公式（5.1）、公式（5.2）称为复合函数的偏导数的链式法则．它可以推广到各种复合关系的复合函数中.

为了记忆和正确使用上述公式，初学时可借助复合函数变量间的关系，画出变量关系图，如图 5-9 所示．从图可以看出：x，y 是自变量，u，v 是中间变量；图中的每一条带箭头的线段表示一个偏导数，如“$z\to u$”表示 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$；求函数 z 对某个自变量如 x 的偏导数时，可从图 5-9 中找出由 z 经过中间变量到达 x 的所有路径：$z\to u\to x$ 和 $z\to v\to x$，共有两条，那么结果就是两项之和，沿第一条路径中有 $z\to u$ 和 $u\to x$ 两个环节，表示两个偏导数相乘：$\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$；同理第二条路径表示 $\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$，于是

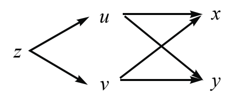


图 5-9

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

需进一步明确的是，因变量到达某个自变量有几条路径，所求偏导数就是几项相加，而

每一条路径中有几个环节，那么该项就由几个偏导数相乘.

例 10　设函数 $z=\mathrm{e}^u\sin v$， $u=xy$， $v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　该函数变量关系参考图 5-9.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1$$
$$=\mathrm{e}^{xy}\left[\,y\sin(x+y)+\cos(x+y)\,\right]$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot x+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1$$
$$=\mathrm{e}^{xy}\left[\,x\sin(x+y)+\cos(x+y)\,\right]$$

例 11　设函数 $z=(x^2-2y)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　设 $u=x^2-2y$， $v=xy$，则 $z=u^v$. 该函数变量关系参考图 5-9.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot 2x+u^v\ln u\cdot y$$
$$=2x^2y(x^2-2y)^{xy-1}+y(x^2-2y)^{xy}\ln(x^2-2y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}\cdot(-2)+u^v\ln u\cdot x$$
$$=-2xy(x^2-2y)^{xy-1}+x(x^2-2y)^{xy}\ln(x^2-2y)$$

例 12　设 $z=f\,(x，v)=x\sin v+2x^2+\mathrm{e}^v$， $v=x^2+y^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　该函数变量关系图如图 5-10 所示.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(\sin v+4x)+(x\cos v+\mathrm{e}^v)\cdot 2x$$
$$=\sin(x^2+y^2)+4x+2x^2\cos(x^2+y^2)+2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=(x\cos v+\mathrm{e}^v)\cdot 2y$$
$$=2xy\cos(x^2+y^2)+2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

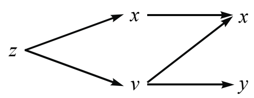


图 5-10

该例中 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 的含义是不同的. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 是把复合函数 $z=f(x，\ x^2+y^2)$ 中的 y 看成不变，求 z 对 x 的偏导数；而 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 是把 $f(x，v)$ 中的 v 看做不变，求对 x 的偏导数.

例 13　设 $z=u^2+v^3$， $u=\sin x$， $v=\dfrac{1}{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解　该函数变量关系图如图 5-11 所示. 本题有两个中间变量，但自变量只有一个，实际上该函数是一个一元复合函数，我们把通过两个或两个以上中间变量复合而成的一元函数的导数称为全导数，并采用一元函数导数的记号.

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=2u\cdot\cos x+3v^2\cdot(-\frac{1}{x^2})$$

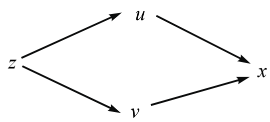


图 5-11

$$=2\sin x\cdot\cos x-3(\frac{1}{x})^2(\frac{1}{x^2})=\sin 2x-\frac{3}{x^4}$$

练习 5.2

1．求下列各函数的偏导数.

（1） $z=\mathrm{e}^{xy}$；　　（2） $z=xy+\dfrac{x}{y}$；

（3） $z=\arctan\dfrac{y}{x}$；　　（4） $u=x^{\frac{y}{z}}$.

2．设 $f(x，y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f'_x(3，4)$、$f'_y(4，3)$.

3．设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

4．求下列函数的二阶偏导数.

（1） $z=x\ln(xy)$；　　（2） $z=\dfrac{x}{y^2}$.

5．设 $z=x^2y+xy^2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1，0)}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1，2)}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0，1)}$.

6．求下列函数的全微分.

（1） $z=x^y$；　　（2） $z=x\sin(x^2+y^2)$.

7．求函数 $z=x^2y^3$ 当 $x=2$， $y=-1$， $\Delta x=0.02$， $\Delta y=-0.01$ 的全增量和全微分.

8．求下列函数的偏导数.

（1） $z=u^2v-uv^2$， $u=x\cos y$， $v=x\sin y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（2） $z=(x^3+y^2)^{x-y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（3） $z=\ln(u^2+y\sin x)$， $u=\mathrm{e}^{x+y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

9．设 $u=\mathrm{e}^{x-2y}$， $x=\sin t$， $y=t^3$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

10．设 $z=xa^y$， $y=\ln x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

5.3 极值和最值

在日常工作和生活中，经常遇到求多元函数的最值问题．与一元函数类似，多元函数的最值和多元函数的极值是有密切联系的．下面以二元函数为主进行讨论、研究，多元的函数情况可以类推.

5.3.1 二元函数的极值

定义 5.7 设函数 $z=f(x，y)$在点（x_0，y_0）的某一邻域内有定义，如果对于该邻域内任

何异于（x_0，y_0）的点（x，y），都有

$$f(x, y)<f(x_0, y_0)$$

或
$$f(x, y)>f(x_0, y_0)$$

那么 $f(x_0, y_0)$ 称为函数 $z=f(x, y)$ 的一个极大值（或极小值），而点（x_0，y_0）称为函数的极大值点（或极小值点）.

函数的极大值和极小值统称为极值，函数的极大值点和极小值点统称为极值点.

例 1　函数 $z=-\sqrt{4x^2+y^2}$ 在点（0，0）处取得极大值，这是因为当点 $(x, y)=(0, 0)$ 时，$z=0$，而当点 $(x,y)\neq(0, 0)$ 时，$z<0$，所以 $z=0$ 是极大值.

例 2　函数 $z=x^2+y^2$ 在点（0，0）处取得极小值，这是因为当点 $(x, y)=(0, 0)$ 时，$z=0$，而当点 $(x, y)\neq(0, 0)$ 时，$z>0$，所以 $z=0$ 是极小值.

例 3　函数 $z=xy$ 在点（0，0）处既不取得极大值也不取得极小值，这是因为点（0，0）处的函数值 $z=0$，而在点（0，0）任一邻域内，总有使函数值 $z>0$ 的点，也有使函数值 $z<0$ 的点.

上面三个例子比较简单，可以利用极值定义直接判断. 但对于一般的二元函数极值问题，则需利用下述两个定理进行计算，它们是一元函数极值理论的推广.

定理 5.3（极值存在的必要条件）　如果函数 $z=f(x, y)$ 在点（x_0，y_0）处有极值，且在点（x_0，y_0）处具有偏导数，那么它在该点的两个偏导数都等于零，即

$$f'_x(x_0, y_0)=0,\quad f'_y(x_0, y_0)=0$$

仿照一元函数，使偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$，$f'_y(x_0, y_0)$ 都等于零的点（x_0，y_0）称为函数 $z=f(x, y)$ 的**驻点**.

由上述定理可知，当函数具有偏导数时，极值点必为驻点；但是驻点未必是极值点，例如上面例 3 中的函数 $z=xy$，在点（0，0）处其偏导数 $z'_x=y$，$z'_y=x$ 都等于零，即点（0，0）是驻点，但不是极值点.

那么，怎样判断一个驻点是否是极值点呢？如果是极值点，是极大值点还是极小值点呢？其他教科书有关于极值存在的充分条件的介绍，这里不做讲述.

与一元函数类似，二元函数的极值也有可能在偏导数不存在的点处取得，但本书只讨论偏导数存在情况下的函数的极值.

5.3.2　最值的求法

与一元函数类似，如果函数 $z=f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，那么在该区域上函数一定取得最大值和最小值.

需要指出的是：在实际问题中，**如果知道函数的最大值或最小值一定在区域 D 内取得，而函数在区域 D 内只有一个驻点，那么该驻点的函数值就是函数在 D 上的最大值或最小值.**

例 4　要用铁板做一个体积为常数 a 的有盖长方体水箱，问水箱的长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省？

解　设水箱的长、宽、高分别为 x，y，z，于是体积 $a=xyz$，水箱所用材料即水箱表面积为

$$A=2(xy+xz+yz)$$

将 $z=\dfrac{a}{xy}$ 代入 A 的表达式中，得

$$A=2(xy+\frac{a}{x}+\frac{a}{y}) \quad (x>0,\ y>0)$$

可见所用材料 A 是 x，y 的二元函数，下面求使该函数取得最小值的点（x，y）.

求 A 对 x，y 的偏导数，并解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial x}=2(y-\dfrac{a}{x^2})=0\\ \dfrac{\partial A}{\partial y}=2(x-\dfrac{a}{y^2})=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\sqrt[3]{a}\\ y=\sqrt[3]{a}\end{cases}$

根据题意可知，水箱所用材料的最小值一定存在，并在开区域 D：$x>0$，$y>0$ 内取得. 又函数在 D 内只有唯一的驻点（$\sqrt[3]{a}$，$\sqrt[3]{a}$），因此该驻点就是 A 的最小值点，即当水箱的长为 $\sqrt[3]{a}$、宽为 $\sqrt[3]{a}$、高为 $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{a}$ 时，水箱所用的材料最省.

练习 5.3

现有制箱材料 4m^2，要求利用这些材料做一个有盖的长方体水箱. 问水箱的长、宽、高各为多少时，所做水箱容积最大？

5.4 二重积分

二重积分与前面学的定积分一样，也是由日常工作和生活的需要而产生的. 定积分是一元函数的“和式”的极限，而二重积分是二元函数的“和式”的极限. 下面通过实例引出二重积分的概念.

5.4.1 二重积分的概念

1．引例——求曲顶柱体的体积

设 $z=f(x,y)$是定义在有界闭区域 D 上的连续函数，且 $f(x,y)\geqslant 0$. 我们把以 D 为底，侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，顶是曲面 $z=f(x,y)$的几何体称为曲顶柱体，如图 5-12 所示. 如何求这个曲顶柱体的体积 V 呢？我们可仿照求曲边梯形面积的方法解决这个问题.

（1）分割. 用一组曲线网把区域 D 分割成 n 个小闭区域：$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$，$\Delta\sigma_i$ 还表示第 i 个小闭区域的面积（$i=1$，2，…，n），分别以这些小闭区域的边界曲线为准线，作母线平行于 z 轴的柱面，这些柱面把要求的曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体，小曲顶柱体的体积依次记为 ΔV_i（$i=1$，2，…，n）.

（2）近似代替. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 中任取一点（ξ_i，η_i），以 f（ξ_i，η_i）为高，底为 $\Delta\sigma_i$ 的小平顶柱体的体积为 $f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$，如图 5-13 所示，近似代替第 i 个小曲顶柱体的体积，即

$$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

（3）求和. 把 n 个小平顶柱体的体积相加就得到曲顶柱体体积的近似值，即

$$V\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i \tag{5.3}$$

（4）取极限. 令 $\Delta\sigma_i$（$i=1$，2，…，n）的最大直径 $\lambda\to 0$（有界闭域的直径是指区域

上任意两点间距离的最大值），则式（5.3）右端和式的极限就是所求曲顶柱体的体积 V，即

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$$

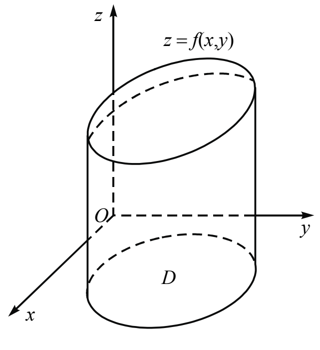


图 5-12

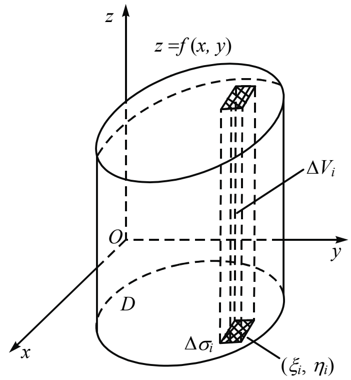


图 5-13

2．二重积分的定义

从上面的具体问题可以看到，所求曲顶柱体的体积归结为求二元函数的某种“和式的极限”，在实际工作中，还有许多量都可归结为这一形式和的极限．抽象出解决这类问题的一般思想，就得到下面二重积分的定义．

定义 5.8　设函数 $f(x,\ y)$在闭区域 D 上有定义且连续．把闭区域 D 任意分割成 n 个小闭区域：$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$，且 $\Delta\sigma_i$ 还表示第 i 个小闭区域的面积（$i=1$，2，…，n）．在每个 $\Delta\sigma_i$ 中任取一点（ξ_i，η_i），作乘积 $f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$（$i=1$，2，…，$n$），并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$．如果当各小区域的直径中的最大者 $\lambda\to 0$ 时，则和式的极限总存在，那么此极限称为函数 $f(x,\ y)$在闭区域 D 上的二重积分，记做 $\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i \tag{5.4}$$

此时也称二重积分 $\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$ 存在或 $f(x,\ y)$在闭区域 D 上可积．

式（5.4）中的 $f(x,\ y)$称为被积函数，$f(x,\ y)\,\mathrm{d}\sigma$ 称为被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$ 称为面积微元（或称为面积元素），x，y 称为积分变量，D 称为积分区域．

由二重积分定义知，曲顶柱体的体积是曲面 $f(x,\ y)$在闭区域 D 上的二重积分，即

$$V=\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$$

定理 5.4（二重积分存在的充分条件）设函数 $f(x,\ y)$在有界闭区域 D 上连续或分块连续，则 f（x，y）在 D 上的二重积分必存在，（即 $f(x,\ y)$在 D 上可积．

今后，若不做特别声明，我们总假定函数 $f(x,\ y)$闭区域 D 上连续．

3．二重积分的几何意义

（1）如果在 D 上 $f(x,\ y)\geqslant 0$，则 $\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以曲面 $z=f(x,\ y)$为顶，以区域 D

为底的曲顶柱体的体积，即$V=\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$.

（2）如果在D上$f(x,y)\leqslant 0$，则曲顶柱体的曲顶在xOy面的下方，二重积分的值为负值，故相应的曲顶柱体的体积为$V=-\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$.

5.4.2 二重积分的性质

性质1 被积函数中的常数因子可以移到积分号外面，即

$$\iint\limits_D kf(x, y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \quad （k\text{为常数}）$$

性质2 两个函数和（差）的二重积分等于它们各自二重积分的和（差），即

$$\iint\limits_D [f(x, y)\pm g(x, y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x, y)\mathrm{d}\sigma$$

性质2对于任意有限个函数的和（差）也是成立的.

性质3 如果有界闭区域D被连续曲线分为两个闭区域D_1与D_2，那么

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}\sigma$$

性质4 如果在有界闭区域D上函数$f(x, y)\equiv 1$，区域D的面积为σ，那么

$$\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$$

性质5（二重积分中值定理） 如果函数$f(x, y)$在有界闭区域D上连续，则在D上至少存在一点（ξ, η），使得

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta)\sigma \quad （\sigma\text{为区域}D\text{的面积}）$$

5.4.3 二重积分的计算

由于二重积分和定积分相类似，是一种和式的极限．因此按定义来计算二重积分是非常困难的，下面介绍将二重积分化为两次定积分来计算的方法，即“二次积分法”.

1．在直角坐标系下二重积分的计算

设二重积分$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$存在，由于二重积分与区域$D$的分法无关，故在直角坐标系下我们选用与坐标轴平行的两组直线把D划分成各边平行于坐标轴的一些小矩形，如图5-14所示，于是，小矩形的面积$\Delta\sigma=\Delta x\Delta y$．因此在直角坐标系下的面积元素为$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是二重积分可写为

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

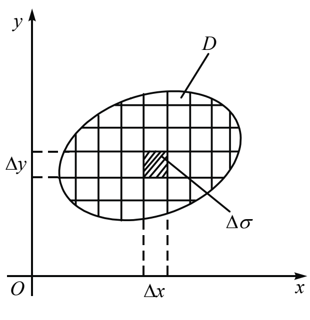


图5-14

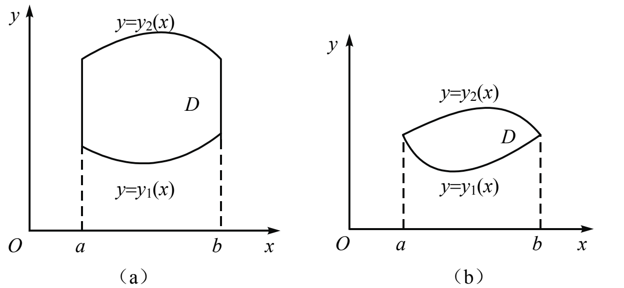
（1）X型区域的二重积分的计算方法

若区域D如图5-15所示，这些区域用不等式组可表示为

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$$

其中$y_1(x)$，$y_2(x)$在区间$[a, b]$上连续，那么该区域称为X型区域.

我们知道，当 $f(x, y) \geqslant 0$ 时，积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示以区域 D 为底，以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积，如图 5-16 所示.



（a）　（b）

图 5-15

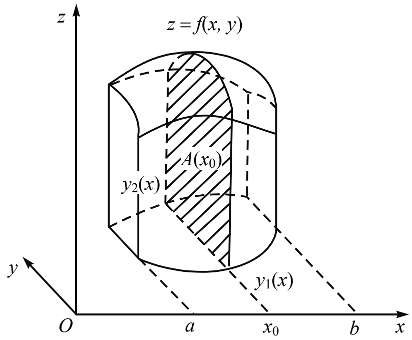


图 5-16

在区间［a，b］上任意固定一点 x_0，过 x_0 作垂直 x 轴的平面，与曲顶柱体相交，截面是以区间［$y_1(x_0)$，$y_2(x_0)$］为底，以曲线 $z = f(x_0, y)$为曲边的曲边梯形（图 5-16 中的阴影部分），由定积分可得其面积为

$$A(x_0) = \int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0, y)\mathrm{d}y$$

一般地，过区间［a，b］上任意一点 x，作垂直 x 轴的平面，截曲顶柱体，被截出的平面面积为

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$$

根据平行截面面积为已知的立体的体积计算公式 $V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$，其中 $A(x)$ 为截面面积，得所求曲顶柱体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

即
$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{5.5}$$

或写做
$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \tag{5.6}$$

公式（5.5）说明，在 X 型区域上计算二重积分可转化为先对 y，后对 x 的两次定积分. 计算第一次积分时，把 $f(x, y)$中的 x 看做是［a，b］中任意一个固定值（常量），这时，$f(x, y)$只是 y 的函数，y 是积分变量，对 y 求定积分，积分限是 x 的函数，积分区间为［$y_1(x)$，$y_2(x)$］，积分结果是 x 的函数或常数；计算第二次积分时，x 是积分变量，在［a，b］上对 x 求定积分，所得结果就是 $f(x, y)$在 D 上的二重积分.

（2）Y 型区域的二重积分的计算方法

若区域 D 如图 5-17 所示，这些区域用不等式组可表示为

$$c \leqslant y \leqslant d，\quad x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$$

其中 $x_1(y)$，$x_2(y)$ 在区间［c，d］上连续，那么该区域称为 Y 型区域. 如图 5-18 所示，用

与上面推导公式（5.5）一样的方法可求得$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$在 Y 型区域上有

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{5.7}$$

或写做

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x \tag{5.8}$$

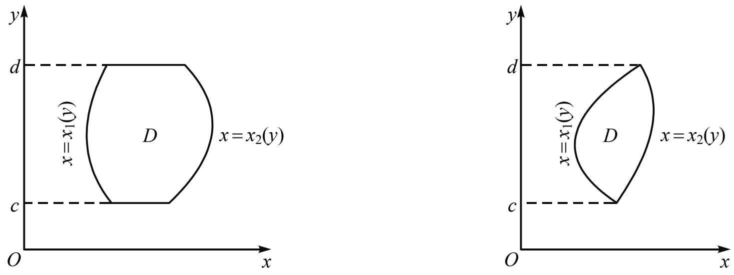


图 5-17

公式（5.7）说明，在 Y 型区域上计算二重积分可转化为先对 x，后对 y 的两次定积分.

例 1 计算$\iint\limits_D \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 由直线 $x=1$， $x=2$， $y=0$， $y=1$ 围成.

解 画出积分区域 D，如图 5-19 所示，D 可看做 X 型区域，用不等式组可表示为

$$1 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

于是

$$\iint\limits_D \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{y}{x^2}\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 x^{-2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

例 2 计算$\iint\limits_D (xy+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 由直线 $x=1$， $y=x$， $y=2x$ 围成.

解 画出积分区域 D，如图 5-20 所示，D 是 X 型区域，用不等式组可表示为

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad x \leqslant y \leqslant 2x$$

于是

$$\iint\limits_D (xy+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2x} (xy+x^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(x\cdot\frac{1}{2}y^2 + x^2 y\right)\Big|_x^{2x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{5}{2}x^3\mathrm{d}x = \frac{5}{8}x^4\Big|_0^1 = \frac{5}{8}$$

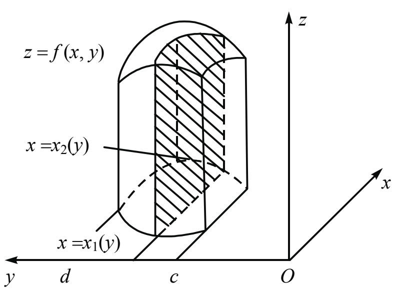


图 5-18

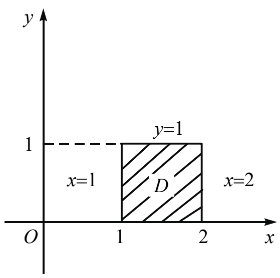


图 5-19

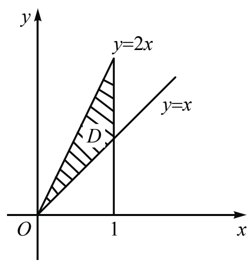


图 5-20

例 3　计算积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 围成.

解　画出积分区域 D，如图 5-21（a）所示，D 是 Y 型区域.

解方程组 $\begin{cases} y^2=x \\ y=x-2 \end{cases}$ 得 $y^2=x$ 与 $y=x-2$ 的交点坐标为（1，−1），（4，2）.

于是区域 D 用不等式组可表示为 $-1\leqslant y\leqslant 2$， $y^2\leqslant x\leqslant y+2$.

因此 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}y\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y$

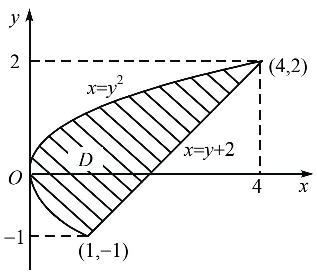
$$=\int_{-1}^{2}\frac{y}{2}\left[(y+2)^2-y^4\right]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(y^3+4y^2+4y-y^5)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right)\Big|_{-1}^{2}=5\frac{5}{8}$$

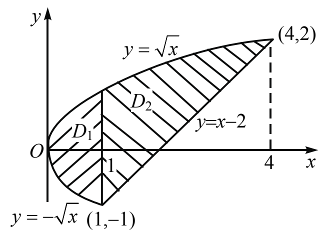
本题上面的解法是先对 x，后对 y 积分．本题也可以先对 y，后对 x 积分，但需把区域 D 分为两个 X 型区域 D_1 和 D_2，如图 5-21（b）所示，这是因为 D 的下边界曲线方程当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时为 $y=-\sqrt{x}$，当 $1<x\leqslant 4$ 时为 $y=x-2$，无法用一个统一的式子表示，因此必须分段进行计算．D_1 和 D_2 用不等式组可分别表示为

$$D_1:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x};\quad D_2:\ 1\leqslant x\leqslant 4,\ x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$$

于是
$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xy\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}xy\mathrm{d}y$$
$$=5\frac{5}{8}$$



（a）



（b）

图 5-21

例 4　计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 由直线 $x=0$， $y=x$， $y=1$ 围成.

解　画出积分区域 D，如图 5-22 所示，D 既是 X 型区域，又是 Y 型区域.

如果 D 看做 X 型区域，那么用不等式组可表示为

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad x\leqslant y\leqslant 1$$

于是
$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

因为函数 e^{-y^2} 的原函数无法用初等函数表示，所以二次积分无法进行，故只能将 D 看做 Y 型

区域，用不等式组可表示为

$$0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant y$$

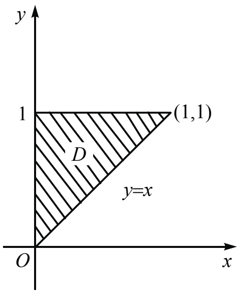


图 5-22

于是 $$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2} \cdot x\Big|_0^y \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\mathrm{e}})$$

例 3、例 4 说明，积分顺序选取恰当与否，不仅关系到二重积分计算的简化，还关系到能否计算出二重积分.

2．在极坐标系下二重积分的计算

有些二重积分，当积分区域 D 的边界曲线用极坐标方程表达非常方便，且被积函数用极坐标变量 r、θ 表达比较简单时，就可以考虑利用极坐标来计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，而这些积分一般在直角坐标系下计算是很困难的，因此有必要介绍在极坐标系下的二重积分的计算方法.

如图 5-23 所示，用曲线族 $r=$ 常数，$\theta=$ 常数去分割区域 D，前者是以极点为圆心的同心圆族，后者是以极点为起点的射线族. 设 $\Delta\sigma$ 是半径为 r 和 $r+\Delta r$ 的两个圆弧及极角为 θ 和 $\theta+\Delta\theta$ 的两条射线所围成的小区域，其面积 $\Delta\sigma$ 近似于以 Δr 和 $r\Delta\theta$ 为边长的小矩形面积，即 $\Delta\sigma \approx r\Delta r\Delta\theta$，因此在极坐标系下的面积元素为 $\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，分别用 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 代换被积函数 $f(x，y)$中的 x，y，于是得到二重积分在极坐标系下的表达式为

$$\iint\limits_D f(x, \ y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(r\cos\theta, \ r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{5.9}$$

下面通过具体例子介绍用极坐标计算二重积分.

例 5 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 为 $x^2+y^2 \leqslant 4$.

解 画出积分区域 D，如图 5-24 所示，D 用关于极坐标 θ，r 的不等式组可表示为

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2$$

于是 $$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \iint\limits_D r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_0^2 = \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{8}{3}\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{16}{3}\pi$$

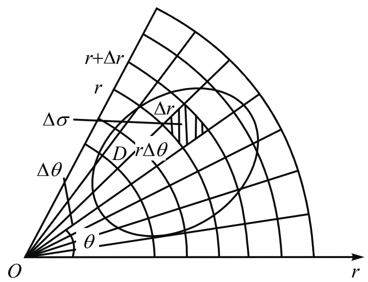


图 5-23

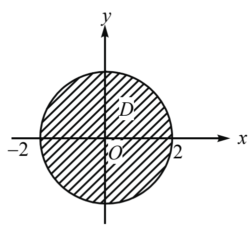


图 5-24

5.4.4　二重积分的应用

1．二重积分在几何上的应用

（1）体积

由二重积分的几何意义可求曲顶柱体的体积.

例 6　求由圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与 $x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体的体积.

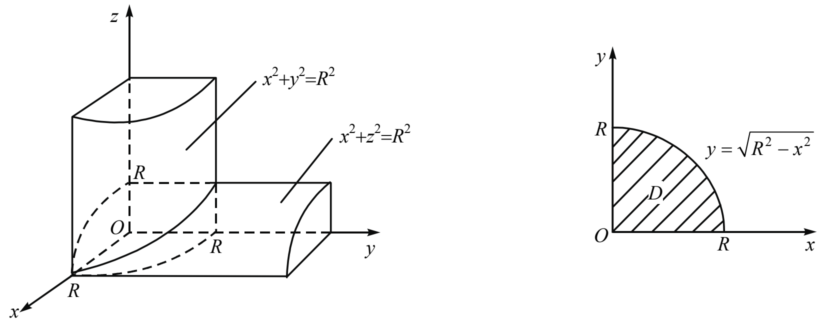
解　圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与 $x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体关于三个坐标面都对称，图 5-25（a）画出了它在第一卦限的图形．设所围立体的体积为 V，在第一卦限的体积为 V_1，则 $V=8V_1$.

而 $V_1=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 如图 5-25（b）所示，且 D 用不等式组可表示为

$$0\leqslant x\leqslant R，\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}$$

于是　$V_1=\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}y=\int_0^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}R^3$

因此所围立体的体积为　$V=8V_1=\dfrac{16}{3}R^3$



（a）　　　　（b）

图 5-25

（2）曲面的面积

如图 5-26 所示，设曲面 Σ 的方程为 $z=f(x，y)$，它在 xOy 面上的投影区域为 D，如果 $f(x，y)$在 D 上具有连续偏导数 $f'_x(x，y)$和 $f'_y(x，y)$，那么曲面 Σ 的面积 S 的计算公式为

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.10}$$

例 7　计算球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=4x$ 内部的那部分面积.

解　球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=4x$ 内部的那部分球面关于 xOy 面和 xOz 面对称，如图 5-27（a）所示，画出了它在第一卦限的图形．设所求面积为 S，在第一卦限的面积为 S_1，则 $S=4S_1$.

由 $x^2+y^2+z^2=16$，得上半球面的方程为 $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$，于是

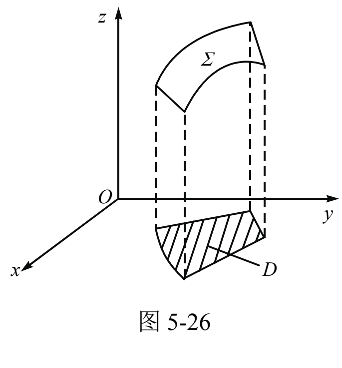


图 5-26

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$$

根据上面的公式（5.10），得

$$S_1=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta}\frac{4}{\sqrt{16-r^2}}r\,\mathrm{d}r=8\pi-16$$

故所求面积为$S=4S_1=32\pi-64$

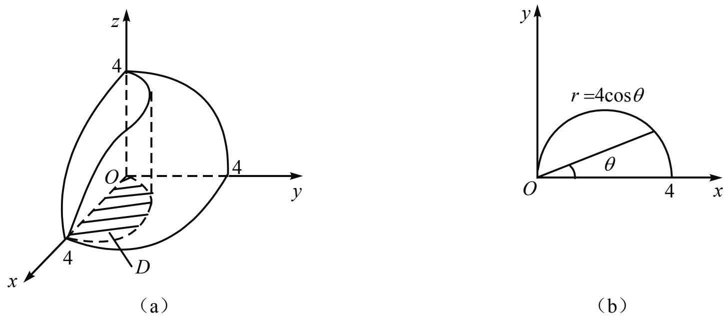


图 5-27

2．二重积分在物理上的应用

（1）平面薄片的质量与质心（重心）

设薄片在 xOy 面上所占的闭区域为 D，其面密度 μ 是点（x，y）的函数：$\mu=\mu(x，y)$，且在 D 上连续，则由二重积分定义可得这个薄片的质量为

$$m=\iint_D\mu(x，y)\mathrm{d}\sigma$$

设薄片的质心坐标为（$\bar{x}$，$\bar{y}$），则

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x，y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\mu(x，y)\mathrm{d}\sigma}，\qquad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x，y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\mu(x，y)\mathrm{d}\sigma}$$

如果薄片质量分布均匀，即面密度为常数，那么可在上式中把 μ 从分子、分母中约去，这样便得到均匀薄片的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint_D x\mathrm{d}\sigma，\quad \bar{y}=\frac{1}{S}\iint_D y\mathrm{d}\sigma$$

其中 S 为区域 D 的面积．此时质心只与薄片的形状有关，故该质心也称为 D 的形心．

例 8 设 D 为由直线 $y=0$，$y=x$ 和 $x=1$ 围成的三角形薄片，其面密度为 $\mu=x^2+y^2$．求薄片的质量和质心．

解 薄片的质量为

$$m=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$

薄片的质心为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}=\frac{\iint\limits_D x(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x^3+xy^2)\mathrm{d}y}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}=\frac{\iint\limits_D y(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x^2y+y^3)\mathrm{d}y}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}}=\frac{9}{20}$$

即薄片的质心为（$\frac{4}{5}$，$\frac{9}{20}$）.

（2）平面薄片的转动惯量

设薄片在 xOy 面上所占的闭区域为 D，其面密度 μ 是点（x，y）的函数：$\mu=\mu(x,y)$，且在 D 上连续，则这个薄片关于 x 轴、y 轴、坐标原点的转动惯量的计算公式分别为

$$I_x=\iint\limits_D y^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$I_O=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

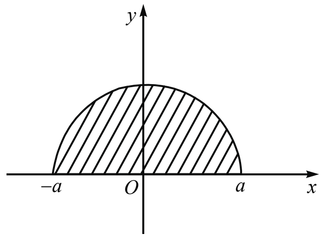


图 5-28

例 9　有半径为 a 的均匀半圆薄片（面密度为常数 μ），求其关于对称轴的转动惯量.

解　首先建立平面直角坐标系，如图 5-28 所示，则对称轴为 y 轴，半圆薄片占有的区域 D 为：$x^2+y^2\leqslant a^2$，$y\geqslant 0$．于是

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma=\mu\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\mu\int_0^{\pi}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^a\mathrm{d}\theta=\mu\cdot\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\mu a^4\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}ma^2$$

其中 $m=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$ 为均匀半圆薄片的质量.

练习 5.4

1．根据二重积分的几何意义直接写出二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

2．设 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a}\mathrm{d}\sigma=4\pi$，这里 $a>0$，求 a 的值.

3．在直角坐标系下，计算二重积分.

（1）$\iint\limits_D(5x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=2x$ 和 $y=x^2$ 围成；

（2）$\iint\limits_D 2x^2y\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 x 轴和抛物线 $y=1-x^2$ 围成；

（3）$\iint\limits_D \frac{x}{y}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x$，$xy=1$ 和 $y=2$ 围成.

4．在极坐标系下求二重积分.

（1）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2 \leqslant 9$.

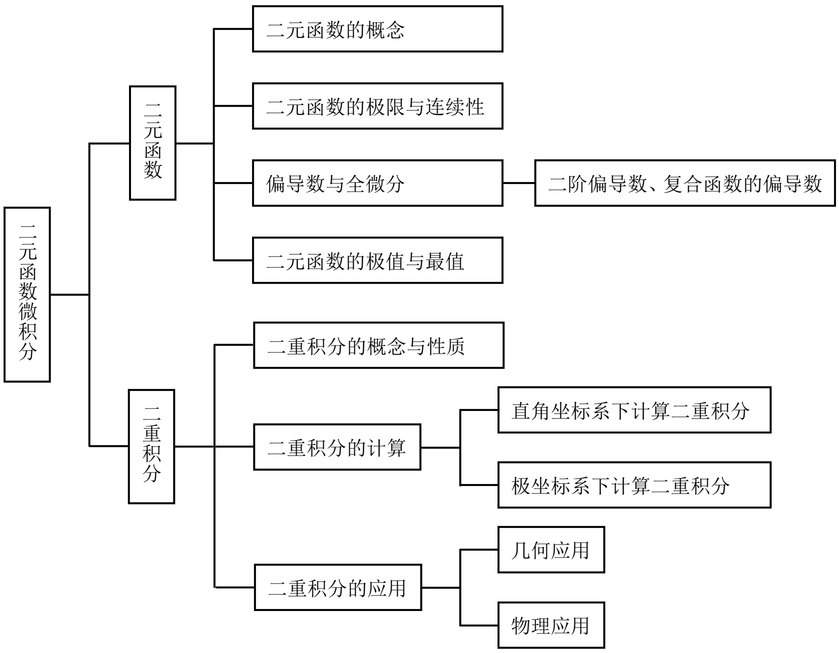
（2）$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$.

5. 计算由四个平面 $x=0$，$y=0$，$x=1$，$y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $z=6-2x-3y$ 截得的立体的体积.

6．求区域 $x^2+y^2 \leqslant a^2$，$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$ 的形心坐标.

7．设以原点为圆心，a 为半径的平面薄圆板的密度函数 $\mu(x, y)=x^2+y^2$．求该薄片的质量.

本章知识结构图



数学史话 6

常微分方程介绍

常微分方程是伴随着微积分一起发展起来的，牛顿和莱布尼茨的著作中都处理过与常微分方程有关的问题. 从 17 世纪末开始，摆的运动、弹性理论以及天体力学等实际问题的研究引出了一系列常微分方程，这些问题在当时往往以挑战的形式被提出而在数学家之间引起热烈的讨论. 有名的如悬线问题：求一根柔软但不能伸长的绳子自由悬挂于两定点而形成的曲线. 该问题于 1690 年由雅各布·伯努利提出，第二年莱布尼茨、惠更斯（C. Huygens，1629—1695）和约翰·伯努利均发表了自己的解答，其中约翰·伯努利通过建立悬链线方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{s}{c}$，解出了曲线 $y=c\cosh\dfrac{x}{c}$. 类似的还有与钟摆运动有关的“等时曲线”方程（1690，雅各布·伯努利）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{by-a^3}}$，以及与光线路径问题有关的“正交轨线”方程（1715，莱布尼茨、牛顿）等.

数学家们起初是采用特殊的技巧来对付特殊的方程，但逐渐开始寻找带普遍性的方法. 莱布尼茨在 1691 年已用分离变量法解出了形如 $y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f(x)g(y)$ 的方程. 1696 年他又用变量代换 $z=y^{1-n}$ 将现在所称的“伯努利方程”（1695，雅各布·伯努利）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)y^n$ 化成了关于 z 和 z' 的线性方程. 伯努利兄弟也推进了分离变量法与变量代换法.

在 18 世纪，由解决一些具体物理问题而发展起来的常微分方程，已经成为有自己的目标与方法的新数学分支.

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

伯努利（Bernoulli，1654—1705，瑞士数学家）

詹姆士·伯努利，1654 年生于巴塞尔，从 1687 年到 1705 年去世，他一直在故乡担任数学教授的职位. 在这段时期，他和莱布尼茨一直保持着积极的通信联系，对莱布尼茨表现了衷心的敬佩，并且不久就完全掌握了他的方法. 接着詹姆士·伯努利便开始用大家都能懂得的语言去解释新方法的原理. 这就是他在世纪末出版论文集《微分学方法，论反切线法》的目的. 在詹姆士作过显著贡献的许多分支中，可以提到的有概率论、变分学和解析几何的推广.

詹姆士·伯努利给概率论建立了牢固的数学基础. 他就这个题目给《博学杂志》（1685 年）写过一些论文，其中典型的问题可表示如下：

1. A、B 二人玩一颗骰子，先掷出幺点的人算是胜利者. A 掷一次之后接着 B 也掷一次. 然后 A 掷两次，B 再掷两次. 然后 A 掷三次，B 掷三次，依次继续下去. 每人获胜的希望多大？

2. 或者，A 先掷一次，B 再掷两次，然后 A 掷三次，B 再掷四次，依次继续下去.

每个这样的问题都悬而未决，直到伯努利自己在 1690 年的《博学者学报》（以后又在《猜测的艺术》）一书中才发表了解答.

摘自《数学史》斯科特；侯德润，张兰译

拉格朗日（J. L. Lagrange，1736—1813 年，意大利数学家）

拉格朗日生于意大利都灵，19 岁就被任命为都灵炮兵学校数学教授. 欧拉和达郎贝尔力荐他到柏林科学院任职. 普鲁士王弗里德里克写信邀请拉格朗日说："欧洲最大之王希望欧洲最大的数学家到宫中为伴". 从 1766 年到 1787 年，拉格朗日长期在柏林科学院服务. 弗里德里克死后，他接受法国路易十六之邀到巴黎定居. 法国大革命期间，革命政府驱走了所有的外籍院士，却破例让拉格朗日留下来并负责法国的度量衡改革.

在 18 世纪，微分方程、变分法等上述这样一些新的分支与微积分本身一起，形成了被称之为"分析"的广大领域，与代数、几何并列为数学的三大学科，并且在这个世纪里，其繁荣程度远远超过了代数和几何. 18 世纪数学家们不仅大大开拓了分析的疆域，而且赋予它与几何相对的意义，他们力图用纯分析的手法以摆脱几何论证的束缚，这种倾向成为 18 世纪数学的又一大特征，在拉格朗日的工作中达到了登峰造极的程度. 拉格朗日在他的《分析力学》中声称："这本书中找不到一张图，我所叙述的方法既不需要作图，也不需要任何几何的或力学的推理，只需要统一而有规则的代数（指分析）运算".

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

第 6 章　常微分方程

在研究自然科学、工程技术的某些问题中，有时需要找出描述此问题数量关系的函数，对该问题进行研究，可是我们往往不能直接获得所需要的函数，但根据问题的具体情况，有时能得到含有要寻找的未知函数及导数或微分的关系式，此关系式就是微分方程，从微分方程要找出我们所需求的未知函数，就是解微分方程.

本章先给出微分方程的一些基本概念，然后再介绍常用的一阶、二阶微分方程的解法.

6.1　常微分方程的基本概念

6.1.1　常微分方程举例

例 1　过点（1，1）的某曲线上任意一点 M（x，y）处的切线斜率为$3x^2$，求该曲线的方程.

解　设所求曲线的方程为$y=f(x)$，根据导数的几何意义，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2 \text{ 或 } \mathrm{d}y=3x^2\mathrm{d}x \tag{6.1}$$

对（6.1）式两端积分，得

$$y=x^3+C$$

式中 C 为任意常数.

因为曲线通过点（1，1），所以，所求曲线方程应满足条件：当$x=1$时，$y=1$，或写成

$$y|_{x=1}=1$$

将上式代入$y=x^3+C$中，得$C=0$，故所求的曲线方程为

$$y=x^3$$

从几何图形上看，$y=x^3+C$表示立方抛物线族，如图 6-1 所示，而所求曲线$y=x^3$仅是立方抛物线族中通过点（1，1）的一条.

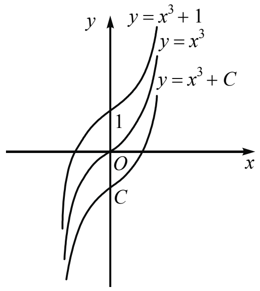


图 6-1

例 2 将质量为 m 的物体由地面以初速度 v_0 垂直上抛，设物体只受重力作用，试求物体上抛距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 因为物体在上抛运动中只受重力作用，所以由牛顿第二定律知

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-mg$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-g \tag{6.2}$$

对（6.2）式两端积分，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1 \tag{6.3}$$

再积分一次，得

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{6.4}$$

式中 C_1， C_2 为任意常数.

由题意 $s(t)$ 应满足两个条件：

$$s\big|_{t=0}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_0$$

将条件 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_0$ 代入式（6.3）中，得 $C_1=v_0$，将条件 $s\big|_{t=0}=0$ 代入式（6.4），得 $C_2=0$.

再把 C_1， C_2 代入式（6.4），得

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

这就是垂直方向抛物体在只受重力作用下的运动方程.

在上述两个例子中，（6.1）式和（6.2）式都含有未知函数的导数或微分，它们都是微分方程，下面我们给出有关微分方程的一些基本概念.

6.1.2 基本概念

1．常微分方程

把含有未知函数及导数或微分的方程称为微分方程，其中未知函数是一元的，称为常微分方程；未知函数是多元的，称为偏微分方程，本章只研究常微分方程，可简称为微分方程或方程.

例如：

（1） $y'=2x$； （2） $y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x=0$；

（3） $y''+y=0$； （4） $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y}$.

在上述方程中，（1）、（2）、（3）是常微分方程，（4）是偏微分方程.

2．微分方程的阶

在微分方程中，未知函数导数的最高阶数，称为微分方程的阶.

如例 1 中，$\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ 是一阶的.

如例 2 中，$\dfrac{d^2s}{dt^2}=-g$ 是二阶的.

3．微分方程的解

凡代入微分方程使方程成立的函数，都称为微分方程的解.

如例 1 中，$y=x^3$ 和 $y=x^3+C$ 都是方程 $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ 的解.

如例 2 中，$s=-\dfrac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 和 $s=-\dfrac{1}{2}gt^2+V_0t$ 都是方程 $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-g$ 的解.

由此可见，在一般情况下微分方程若有解，则解有无穷多个．微分方程的每一个解，都对应着平面上的一条曲线，称为解曲线或积分曲线，而无穷多个解在平面上就对应着积分曲线簇.

4．微分方程的通解

如果在微分方程的解中，所含任意常数是独立的（任意常数 C_1，C_2 之间没有函数关系 $f(C_1, C_2)=0$，称 C_1，C_2 是独立的），一般情况下，任意常数的个数恰好等于微分方程的阶数，这个解称为微分方程的通解.

如例 1 中，$y=x^3+C$ 是方程 $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ 的通解.

如例 2 中，$y=-\dfrac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是方程 $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-g$ 的通解.

5．微分方程的特解和初始条件

一般情况下，在通解中利用已知条件确定了任意常数后所得到的解，称为微分方程的特解；而把确定任意常数得到特解的已知条件，称为初始条件.

如例 1 中，初始条件为 $y|_{x=0}=0$，利用它确定了通解 $y=x^3+C$ 中的 $C=0$，得到了特解 $y=x^3$.

如例 2 中，初始条件为 $s|_{t=0}=0$，$\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=0}=v_0$，利用它确定了通解 $s(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 中的 $C_1=v_0$，$C_2=0$，得到了特解 $s(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t$.

例 3　验证 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

解　因为

$$y'=C_1\cos x-C_2\sin x$$
$$y''=-C_1\sin x-C_2\cos x$$

将 y'，y'' 代入方程 $y''+y=0$，得

$$y''+y=-C_1\sin x-C_2\cos x+C_1\sin x+C_2\cos x\equiv 0$$

所以　$y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是方程 $y''+y=0$ 的解.

由于该解中含有两个独立的任意常数，而方程又是二阶的，所以这个解就是所给方程的通解.

练习 6.1

1．指出下列各微分方程的阶．

（1）$(7x-3y)\mathrm{d}x+(2x+5y)\mathrm{d}y=0$；

（2）$y''-2yy'-xy=0$；

（3）$xy'''+2y''+x(y')^5+y=0$；

（4）$2y''=3(y')^2$．

2．验证 $y=C\mathrm{e}^x$ 是方程 $y'=y$ 的通解，试求这个微分方程满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解．

3．验证 $y=C\sin x$ 是方程 $y'=y\cot x$ 的通解，试求这个微分方程满足初始条件 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=1$ 的特解．

6.2　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x，y)$，根据右端 $f(x，y)$的常见的不同类型，有以下相应的不同解法，而这些解法的共同特点都是把微分方程的求解转化为求积分的问题．

6.2.1　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$ 型

此类型方程的特点是等号右端 $f(x)$ 仅为 x 的连续函数，其解法是把方程写成

$$\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$$

两端进行积分

$$\int\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$$

积分后便可得到方程的通解．

例 1　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2}{x}$ 的通解．

解　将方程写成

$$\mathrm{d}y=\frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

两端积分，得所求方程的通解为

$$y=\ln x^2+C\quad（C 为任意常数）$$

例 2　求方程 $y'=3x^2+\cos x-1$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解．

解　将方程写成

$$\mathrm{d}y=(3x^2+\cos x-1)\mathrm{d}x$$

两端积分，得所求方程的通解为

$$y=x^3+\sin x-x+C\quad（C 为任意常数）$$

由 $y|_{x=0}=1$，确定出 $C=1$，得所求方程的特解为

$$y=x^3+\sin x-x+1$$

在下面解方程的过程中，若没有特殊说明，在通解中的 C 均为任意常数，不再说明.

6.2.2　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 型

此类型方程的特点是等号右端是关于 x 的连续函数 $f(x)$ 与关于 y 的连续函数 $g(y)$ 之积，此类型的方程，也称为可分离变量的方程．其解法可用分离变量法，当 $g(x)\neq 0$ 时，先将方程分离变量，$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$，再两端积分，$\int\frac{\mathrm{d}x}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$，积分后便得到方程的通解.

例 3　求方程 $y(x^2+1)\mathrm{d}y=x(y^2+1)\mathrm{d}x$ 的通解.

解　将原方程分离变量，得

$$\frac{y}{y^2+1}\mathrm{d}y=\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

两端积分

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln C \qquad (C>0)$$

得所求方程的通解为

$$y^2+1=C(x^2+1)$$

例 4　求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^{x+y}$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解.

解　原方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^x\times 10^y$$

分离变量，得

$$10^{-y}\mathrm{d}y=10^x\mathrm{d}x$$

两端积分，得

$$\int 10^{-y}\mathrm{d}y=\int 10^x\mathrm{d}x$$

$$-10^{-y}\frac{1}{\ln 10}=10^x\frac{1}{\ln 10}-\frac{C}{\ln 10}$$

即

$$10^x+10^{-y}=C$$

由 $y|_{x=1}=0$，代入上式确定出 C=11，得所求方程的特解为

$$10^x+10^{-y}=11$$

在 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 型中，当 $g(y)=1$ 时，即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$ 型，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$ 型（6.2.1 节）是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 型（6.2.2 节）的特例.

6.2.3　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$ 型

此类方程称为一阶线性方程，其中 $p(x)$、$q(x)$ 均为连续函数，当 $q(x)\neq 0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x) \tag{6.5}$$

称为一阶线性非齐次方程；当 $q(x)=0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0 \tag{6.6}$$

称为一阶线性齐次方程.

定理 6.1 设 $p(x)$、$q(x)$ 均为连续函数，则方程（6.6）的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{6.7}$$

方程（6.5）的通解为

$$y=(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{6.8}$$

解方程（6.5）的方法称为常数变易法，其步骤是先将方程（6.6）用分离变量法，可得出求解方程（6.6）的通解公式（6.7）；然后再将（6.7）中的任意常数 C 换成待定的函数 $C(x)$，代入方程（6.5）确定出 $C(x)$ 后，再代入（6.7）式，最后得出求解方程（6.5）的通解公式（6.8）.

此处需要说明，在通解公式（6.7）、（6.8）中为了明显地表示通解中的任意常数，$\int p(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 仅表示某一个原函数.

从通解公式（6.8）可看出，非齐次方程的通解中的结构包括两项：一项是齐次方程（6.6）的通解；另一项是非齐次方程（6.5）的特解.

求解一阶线性齐次方程（6.6）的通解，可用分离变量法，也可直接用通解公式（6.7）；同样求解一阶线性非齐次方程（6.5）的通解，可用常数变易法，也可直接用通解公式（6.8）.

例 5 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cos x=0$ 的通解.

解 此方程是一阶线性齐次方程，可用分离变量法求解，当 $y\neq 0$ 时，将原方程分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\cos x\mathrm{d}x$$

两端积分，得

$$\ln|y|=-\sin x+C_1$$

可写成

$$|y|=\mathrm{e}^{-\sin x+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{-\sin x}$$

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{-\sin x}=C\mathrm{e}^{-\sin x}\qquad（其中 C=\pm\mathrm{e}^{C_1}）$$

又因为 $y=0$ 也是原方程的解，在上式中 C=0 与之对应，所以方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\sin x}\qquad（C 为任意常数）$$

如果我们用通解公式（6.7）来求解，其中 $p(x)=\cos x$，同样可得到所求方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{-\int\cos x\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{-\sin x}$$

例 6 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2xy+4x$ 的通解.

解 此方程是一阶线性非齐次方程，可用常数变易法求解.

（1）首先求对应其齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=0$$

的通解，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-2x\mathrm{d}x$$

两端积分，化简后得齐次方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-x^2} \tag{6.9}$$

（2）再求非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x$$

的通解，用常数变易法，把（6.9）式中的常数 C 换成待定的函数 $C(x)$，即令

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-x^2} \tag{6.10}$$

代入原方程，有

$$C'(x)\mathrm{e}^{-x^2}-2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2}+2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2}=4x$$

化简后

$$C'(x)=4x\mathrm{e}^{x^2}$$

两端积分，得

$$C(x)=2\mathrm{e}^{x^2}+C$$

将上式代入（6.10）式，得原方程的通解为

$$y=(2\mathrm{e}^{x^2}+C)\mathrm{e}^{-x^2}=2+C\mathrm{e}^{-x^2}$$

例 7　求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-xy+x^3$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解.

解　此方程是一阶线性非齐次方程，我们用通解公式(6.8)求解，其中 $p(x)=x$，$q(x)=x^3$，所求方程的通解为

$$\begin{aligned}
y&=(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\\
&=(\int x^3\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\\
&=(\int x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+C)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\\
&=\left[\int x^2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})+C\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\\
&=(\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}+C)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\\
&=\left[x^2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-2\int \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})+C\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\\
&=(x^2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}+C)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\\
&=(x^2-2)+C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

将 $y|_{x=0}=0$ 代入上式通解中，确定出 C=2，得所求方程的特解为

$$y=(x^2-2)+2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

练习 6.2

1．求下列微分方程的通解或特解.

（1）$y' = 2x - 5\sin x + e^x$；（2）$e^{-x}dy = xdx$；

（3）$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$，$y|_{x=1} = 1$；（4）$\frac{dy}{dx} = \cos x$，$y|_{x=0} = 1$.

2．求下列微分方程的通解或特解.

（1）$x\frac{dy}{dx} - y\ln y = 0$；（2）$(1+x)dx - (1-y)dy = 0$；

（3）$2y(1+x)y' = 4 + y^2$，$y|_{x=3} = 2$；（4）$xy' - y = 0$，$y|_{x=1} = 2$.

3．求下列微分方程的通解或特解.

（1）$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0$；（2）$\frac{dy}{dx} + y\sin x = 0$；

（3）$y' + y = e^{-x}$；（4）$y' + 2y = 4x$；

（5）$y' + 2xy = xe^{-x^2}$，$y|_{x=0} = 1$；（6）$y' - y = 2xe^{2x}$，$y|_{x=0} = 1$.

6.3 二阶常系数线性微分方程

我们把形如

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{6.11}$$

的方程称为二阶常系数线性微分方程，其中 p、q 均为常数，$f(x)$ 称为非齐次项.

当 $f(x) \neq 0$ 时，方程（6.11）称为二阶常系数线性非齐次微分方程；当 $f(x) \equiv 0$ 时，方程（6.11）变为

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{6.12}$$

称为二阶常系数线性齐次微分方程.

下面我们先介绍方程（6.12）通解的结构和解法，然后再介绍方程（6.11）通解的结构和解法.

6.3.1 二阶常系数线性齐次微分方程

1．二阶常系数线性齐次微分方程通解的结构

定理 6.2 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次方程（6.12）的两个特解，且 $y_2(x) \neq 0$，$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，那么

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad （C_1，C_2 \text{ 为任意常数}）$$

就是齐次方程（6.12）的通解.

例如，容易验证 $y_1 = e^{2x}$ 与 $y_2 = e^x$ 都是方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特解，而且

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x \neq \text{常数}$$

故 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{x}$ 是方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解.

2．二阶常系数线性齐次微分方程的解法

二阶常系数线性齐次微分方程的解法是用代数的方法去求解，称为特征根法.

由齐次方程（6.12）写出对应的方程 $\gamma^2 + p\gamma + q = 0$，称为齐次方程（6.12）的特征方程，并求出 $\gamma^2 + p\gamma + q = 0$ 的两个根 γ_1、γ_2，称为特征根，根据特征根的三种情况，分别求出齐次方程（6.12）对应的通解，如表 6-1 所示.

表 6-1

特征方程	特征根的情况	方程（6.12）对应的通解
$\gamma^2 + p\gamma + q = 0$	有两个不相等的实根 γ_1、γ_2	$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$
	有两个相同的实根 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$	$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{rx}$
	有一对共轭虚根 $\gamma_1 = \alpha + \beta\mathrm{j}$、$\gamma_2 = \alpha - \beta\mathrm{j}$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

例 1　求方程 $y'' - 3y' - 4y = 0$ 的通解.

解　特征方程为

$$\gamma^2 - 3\gamma - 4 = 0$$

解得特征根为 $\gamma_1 = -1$，$\gamma_2 = 4$，得所求方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}$$

例 2　求方程 $y'' + 4y' + 4 = 0$ 的通解.

解　特征方程为

$$\gamma^2 + 4\gamma + 4 = 0$$

解得特征根为 $\gamma_1 = \gamma_2 = -2$，得所求方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-2x}$$

例 3　求方程 $y'' + 2y' + 10y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$，$y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

解　特征方程为

$$\gamma^2 + 2\gamma + 10 = 0$$

解得特征根为 $\gamma_1 = -1 + 3\mathrm{j}$，$\gamma_2 = -1 - 3\mathrm{j}$，得所求方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

将 $y|_{x=0} = 1$，$y'|_{x=0} = 2$ 代入，确定出 $C_1 = C_2 = 1$，得所求方程的特解为

$$y = \mathrm{e}^{-x}(\cos 3x + \sin 3x)$$

6.3.2　二阶常系数线性非齐次微分方程

1．二阶常系数线性非齐次微分方程通解的结构

定理 6.3　如果 y^* 是非齐次方程（6.11）的一个特解，而 Y 是方程（6.11）对应的齐次方程（6.12）的通解，那么

$$y = Y + y^*$$

就是非齐次方程（6.11）的通解.

因为在前面已介绍了齐次方程（6.12）求通解的方法，所以根据定理 6.3 可知，求非齐次方程（6.11）的通解，就归结为求该方程的一个特解了，而求非齐次方程特解是用代数的方法，称为比较系数法.

求非齐次方程（6.11）的特解与方程中的 p、q 及非齐次项 $f(x)$ 有关，由于方程中的 p、q 及 $f(x)$ 有各种不同情况，所以对应的特解形式也就不同.

2．求 $f(x)$ 常见的三种情况的特解的方法

（1） $f(x)=P_n(x)$（其中 $P_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式）.

这时方程（6.11）变成了

$$y''+py'+qy=P_n(x)$$

$f(x)=P_n(x)$ 时，方程所对应的特解形式如表 6-2 所示，表中的 $Q_n(x)$ 是与 $P_n(x)$ 同次的待定多项式.

表 6-2

$f(x)$ 的形式	条　　件	特解 y^* 的形式
$f(x)=P_n(x)$	$q\neq 0$ （ $p\neq 0$ 或 $p=0$ ）	$y^*=Q_n(x)$
	$q=0$， $p\neq 0$	$y^*=xQ_n(x)$
	$p=q=0$	$y^*=x^2Q_n(x)$

例 4　求方程 $y''-2y'+y=x+1$ 的一个特解.

解　由表 6-2，设方程的特解为

$$y^*=Ax+B$$

而 $y^{*'}=A$， $y^{*''}=0$，代入原方程，有

$$-2A+Ax+B=x+1$$

比较两端同次项系数，得

$$\begin{cases}A=1\\B=3\end{cases}$$

所求方程的一个特解为

$$y^*=x+3$$

例 5　求方程 $y''-y'=2x$ 的一个特解.

解　由表 6-2，设方程的特解为

$$y^*=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$$

而 $y^{*'}=2Ax+B$， $y^{*''}=2A$，代入原方程，有

$$2A-2Ax-B=2x$$

比较两端同类项系数，得

$$\begin{cases}-2A=2\\2A-B=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}A=-1\\B=-2\end{cases}$$

所求方程一个特解为

$$y^* = -x^2 - 2x$$

（2） $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$（其中 $P_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式，λ 为常数）.

这时方程（6.11）变成了

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\lambda x}$$

$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 时，方程所对应的特解形式如表 6-3 所示，表中的 $Q_n(x)$ 是与 $P_n(x)$ 同次的待定多项式.

表 6-3

$f(x)$ 的形式	条　　件	特解 y^* 的形式
$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$	λ 不是特征根	$y^* = Q_n(x)e^{\lambda x}$
	λ 是特征单根	$y^* = xQ_n(x)e^{\lambda x}$
	λ 是特征重根	$y^* = x^2Q_n(x)e^{\lambda x}$

例 6　求方程 $y'' - 2y' + y = 3e^{-2x}$ 的通解.

解　先求对应齐次方程的通解 Y.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

的特征方程为

$$\gamma^2 - 2\gamma + 1 = 0$$

解得特征根为 $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$，所求对应齐次方程的通解为

$$Y = (C_1 + C_2x)e^x$$

再求非齐次方程的特解 y^*.

因 $\lambda = -2$ 不是特征根，由表 6-3，设原方程的特解为

$$y^* = Ae^{-2x}$$

而 $y^{*\prime} = -2Ae^{-2x}$， $y^{*\prime\prime} = 4Ae^{-2x}$，代入原方程，有

$$4Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} + Ae^{-2x} = 3e^{-2x}$$

比较两端同类项系数，得　$A = \dfrac{1}{3}$

原方程的特解为

$$y^* = \frac{1}{3}e^{-2x}$$

所求原方程的通解为

$$y = Y + y^* = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}$$

例 7　求方程 $y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x}$ 的通解.

解　先求对应齐次方程的通解 Y.

由例 1 求得

$$Y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x}$$

再求非齐次方程的特解 y^*.

因 $\lambda = -1$ 是特征单根，由表 6-3，设原方程的特解为

$$y^* = xAe^{-x},$$

而 $y^{*'} = Ae^{-x} - Axe^{-x}$， $y^{*''} = Axe^{-x} - 2Ae^{-x}$，代入原方程，有

$$Axe^{-x} - 2Ae^{-x} - 3(Ae^{-x} - Axe^{-x}) - 4Axe^{-x} = -5e^{-x}$$

比较两端同类项系数，得 $A = 1$，

原方程的特解为

$$y^* = xe^{-x}$$

所求原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} + xe^{-x}$$
$$= (C_1 + x)e^{-x} + C_2e^{4x}$$

例 8 试写出方程 $y'' - 2y' + y = (x^3 + 5)e^x$ 的特解形式.

解 特征方程为 $\gamma^2 - 2\gamma + 1 = 0$，特征根为 $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

因为 $f(x) = (x^3 + 5)e^x$，其中 $P_n(x) = x^3 + 5$ 是一个三次多项式，$\lambda = 1$ 是特征重根，由表 6-3，所求原方程的特解形式为

$$y^* = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^x$$

对于 $f(x) = P_n(x)$、$f(x) = Ae^{\lambda x}$ 分别是 $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 当 $\lambda = 0$、$n = 0$ 的特例.

（3） $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ （其中 a、b、ω 均为常数）.

这时方程（6.11）变成了

$$y'' + py' + qy = a\cos\omega x + b\sin\omega x$$

$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ 时，方程所对应的特解形式如表 6-4（其中 A、B 是待定的常数）所示.

表 6-4

$f(x)$ 的形式	条　件	特解 y^* 的形式
$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$	$\pm\omega$j 不是特征根	$y^* = A\cos\omega x + B\sin\omega x$
	$\pm\omega$j 是特征根	$y^* = x(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$

例 9 求方程 $y'' - y' - 2y = \sin 2x$ 的通解.

解 先求对应齐次方程的通解 Y.

$$y'' - y' - 2y = 0$$

的特征方程为

$$\gamma^2 - \gamma - 2 = 0$$

解得特征根为 $\gamma_1 = -1$， $\gamma_2 = 2$，所求对应齐次方程的通解为

$$Y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$$

再求非齐次方程的特解 y^*.

因 ± 2j 不是特征根，由表 6-4，设原方程的特解为

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$$

而 $y^{*'} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$， $y^{*''} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$，代入原方程，整理后有

$$(-6A - 2B)\cos 2x + (2A - 6B)\sin 2x = \sin 2x$$

比较两端同类项系数，得

$$\begin{cases} -6A-2B=0 \\ 2A-6B=1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{20} \\ B=-\dfrac{3}{20} \end{cases}$$

原方程的特解为

$$y^*=\frac{1}{20}\cos 2x-\frac{3}{20}\sin 2x$$

所求原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{20}\cos 2x-\frac{3}{20}\sin 2x$$

练习 6.3

1．求下列微分方程的通解或特解．

（1） $y''+5y'-6y=0$；

（2） $y''-6y'+9y=0$；

（3） $y''-y'+y=0$；

（4） $y''-4y'+3y=0$， $y|_{x=0}=6$， $y'|_{x=0}=10$；

（5） $4y''+4y'+y=0$， $y|_{x=0}=4$， $y'|_{x=0}=5$；

（6） $y''+4y'+29y=0$， $y|_{x=0}=0$， $y'|_{x=0}=5$．

2．求下列微分方程的一个特解．

（1） $y''-2y'+y=3x^2$；

（2） $y''-2y'=x+1$；

（3） $y''-3y'+2y=5\mathrm{e}^{3x}$；

（4） $y''+4y'-5y=-2\mathrm{e}^{-5x}$；

（5） $y''+4y=\cos 2x$．

3．写出下列微分方程的特解形式．

（1） $y''-3y'=4x^3+1$；

（2） $y''-6y'+8y=5x\mathrm{e}^{3x}$；

（3） $y''+10y'+25y=x\mathrm{e}^{-5x}$；

（4） $y''+16y=3\cos 4x-4\sin 4x$．

4．求下列微分方程的通解．

（1） $y''-4y'+4y=x$；

（2） $2y''+y'-y=2\mathrm{e}^x$；

（3） $y''+y=\sin x$．

6.4 微分方程的应用

微分方程在自然现象、工程技术以及很多学科中的应用非常广泛．本节主要介绍微分方程在机械、电学、力学中的应用．

6.4.1 机械振动中的应用

振动现象是普遍而重要的一种物理现象．例如，单摆、弹簧振动、音叉振动、乐器中弦线的振动、机床主轴的振动、发动机运转时机座所受的振动等，都是机械振动；又如，在声学中的声波、超声波等都是不同频率的振动．研究这些振动现象，往往归结为常系数线性微分方程的问题．下面重点介绍机械振动中最简单的例子——弹簧振动．

设有一个弹簧，它的上端固定，下面挂一个质量为 m 的物体．当物体处于静止状态时，作用在物体上的重力与弹性力大小相等、方向相反，这个位置就是物体的平衡位置，取 x 轴垂直向下，并取物体的平衡位置为坐标原点，如图 6-2 所示．

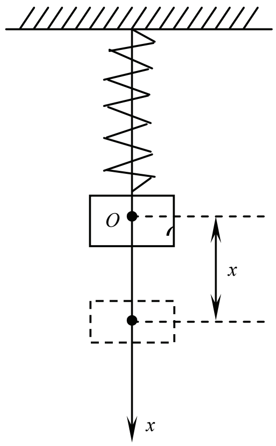


图 6-2

如果给物体一个初速度 $v_0 \neq 0$，那么物体就会离开平衡位置，并在平衡位置附近做上下振动．在振动过程中，物体的位置 x 随时间 t 变化，即 $x = x(t)$，要确定物体的振动规律，就是要求出函数 $x = x(t)$．

由力学知道，弹簧要使物体回到平衡位置，作用在物体上的力有弹性恢复力 f 和介质（如空气、油等）阻力 R 等．

按照虎克定律，弹性恢复力 $f = -kx$，其中 k 为弹簧的弹性系数，负号表示弹性恢复力的方向和物体位移的方向相反．

介质阻力 $R = -\mu v = -\mu \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，其中 μ 为比例系数，负号表示介质阻力的方向与物体运动速度方向相反．

下面分别介绍描述物体振动时三种情况的微分方程．

（1）物体振动时，仅考虑弹性恢复力，不考虑所受的介质阻力，由牛顿第二定律得物体振动的微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx$$

若令 $\omega^2=\frac{k}{m}$，上式化简成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

（2）物体振动时，即考虑弹性恢复力，又考虑介质阻力，由牛顿第二定律得物体振动的微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

若令 $\omega^2=\frac{k}{m}$，$2\delta=\frac{\mu}{m}$，上式化简成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$$

以上两种物体的振动称为自由振动．（1）称为无阻尼自由振动，又称为简谐振动；（2）称为阻尼自由振动，由此看出描述自由振动的方程就是二阶常系数线性齐次微分方程．

（3）物体振动时，在（2）的情况下，若还受到垂直的外力 $F(t)$ 的作用，此时物体的振动称为强迫振动．它的微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-F(t)$$

若令 $\omega^2=\frac{k}{m}$，$2\delta=\frac{\mu}{m}$，$f(t)=\frac{F(t)}{m}$，上式化简成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=f(t)$$

显然，描述强迫振动的方程就是二阶常系数线性非齐次微分方程．

例 1　如图 6-2 所示，物体振动时，在（1）的情况下且在瞬时 $t=0$ 的位置 $x=0$，初速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$ 时，求反映物体振动规律的函数 $x=x(t)$．

解　由已知，微分方程及初始条件为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0\text{，}\quad x\big|_{t=0}=0\text{，}\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0$$

特征方程为

$$\gamma^2+\omega^2=0$$

解得特征根为 $\gamma=\pm\omega\mathrm{j}$，得方程的通解为

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$$

由初始条件 $x\big|_{t=0}=0$，$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0$，确定出 $C_1=0$，$C_2=\frac{v_0}{\omega}$，所求方程的特解为

$$x=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

特解所反映的运动就是简谐振动．这个振动的振幅为 $\frac{v_0}{\omega}$，周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，角频率为

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，又称系统的固有频率.

6.4.2　电学电路中的应用

振动现象不仅出现在机械中，在电学中也是普遍而重要的一种物理现象．例如，交流发电机的电压与电流是按照正弦规律而变化的，此种现象称为电磁振荡，又如，在光学中的紫外线、红外线、r 射线以及无线电波等都是不同频率的电磁振荡的传播过程．研究这些现象，同样也是归纳为常系数线性微分方程的问题．下面重点介绍电路中最简单的电磁振荡的三种情况.

（1）如图 6-3 所示的电磁振荡回路，由电容和电感组成.

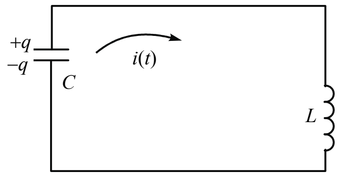


图 6-3

设在某一时刻，电容器的极板上经充电产生了电荷 q 后，撤去电源，于是两极板的电位差 $\dfrac{q}{C}$ 等于线圈里面所产生的感应电动势 $-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$．所以

$$\frac{q}{C}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{LC}=0$$

由于 $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，代入上式，并令 $\omega^2=\dfrac{1}{CL}$，得出

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2q=0$$

此方程与机械振动的无阻尼自由振动方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$ 形式上完全相同，我们把这种电磁振荡称为无阻尼自由振荡.

（2）如图 6-4 所示的电磁振荡回路，由电容、电感、电阻组成.

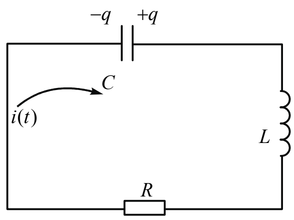


图 6-4

任何电路都有电阻，就和任何机械振动都受摩擦力（如弹簧振动中的介质阻力）影响一

样．由欧姆定律得

$$i=\frac{-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-\dfrac{q}{C}}{R}$$

即

$$\frac{q}{C}+Ri=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

由于 $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，代入上式，得出

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{CL}=0$$

此方程与机械振动的阻尼自由振动的方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$ 在形式上相同，我们称这种电磁振荡为阻尼自由振荡．可以看出，描述无阻尼与阻尼自由振荡的方程都是二阶常系数线性齐次微分方程．

（3）如图 6-5 所示的电磁振荡回路，由电容、电感、电阻、电源组成．

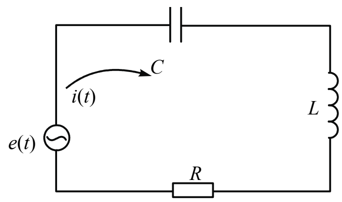


图 6-5

在阻尼自由振荡电路中，由于能量不断地损失，极板上的电荷必然要衰减，若在电路中接有电源 $e(t)$，例如，交流电势 $e(t)=E_m\sin\omega t$，继续不断地供给能量，极板上的电荷就永远不会衰减．这种在周期性电动势的作用下，电路中产生的电磁振荡称为强迫振荡．

同样，由欧姆定律得

$$i=\frac{-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-\dfrac{q}{C}+E_{\mathrm{m}}\sin\omega t}{R}$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{CL}=\frac{E_{\mathrm{m}}}{L}\sin\omega t$$

此方程与机械振动的强迫振动 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=f(t)$ 在形式上相同．可以看出，描述强迫振荡的方程就是二阶常系数线性非齐次微分方程．

6.4.3　力学中的应用

例 2　如图 6-6 所示，炮弹发射时，以初速度 v_0 与水平夹角 α 的方向发射，求炮弹在水平与垂直方向的运动方程．

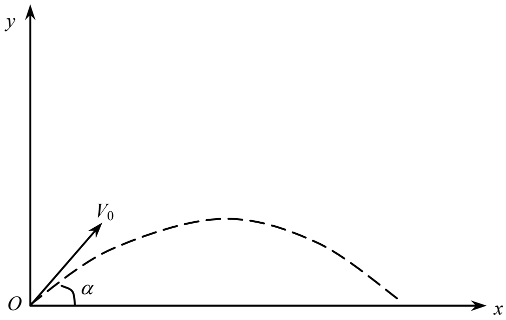


图 6-6

解 由已知条件，炮弹水平与垂直方向的速度分别为

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\alpha \\ v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

上式分别积分，得

$$x = \int v_0 \cos\alpha \mathrm{d}t = v_0 t \cos\alpha + C_1$$

$$y = \int (v_0 \sin\alpha - gt)\mathrm{d}t = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt + C_2$$

由初始条件 $x|_{t=0} = 0$，$y|_{x=0} = 0$，确定出 $C_1 = 0$，$C_2 = 0$，即得出炮弹在水平与垂直方向的运动方程

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

例 3 从地球表面铅垂直向上以初速度 v_0 发射一枚火箭．若不计空气阻力，只考虑地球引力，要使火箭一去不复返．问应给火箭多大的初速度？

解 将火箭视为质点．以火箭在地面上发射处为坐标原点，取 x 轴铅垂直向上为正，如图 6-7 所示．火箭发射受地球的引力

$$F = f\frac{mM}{(x+R)^2} \tag{6.13}$$

式中 f——万有引力常数；
m——火箭质量；
M——地球质量；
x——火箭与地面的距离；
R——地球半径．

当火箭在地面上时，$x = 0$，$F = mg$，代入（6.13）式中，得 $fM = gR^2$，所以，火箭发射受到地球的引力可写成

$$F = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

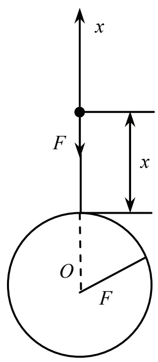


图 6-7

火箭的运动微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

因为 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$，代入上式，有

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

$$v\mathrm{d}v=-\frac{gR^2}{(x+R)^2}\mathrm{d}x$$

在 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=0$，而在任一瞬时 t，火箭的速度为 v，坐标为 x，

$$\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=-gR^2\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{(x+R)^2}$$

积分后，得

$$v^2-v_0^2=2gR^2\left(\frac{1}{x+R}-\frac{1}{R}\right)$$

或写成

$$v_0^2=v^2-2gR^2\left(\frac{1}{x+R}-\frac{1}{R}\right)\tag{6.14}$$

现在来讨论，要使火箭脱离地球引力的影响，即不受地球引力的作用，所需的最小发射速度 v_0，由（6.13）式可知，必须使 $x\to+\infty$，而由（6.14）式当 $x\to+\infty$ 且 $v=0$ 时，v_0 为最小，因此由（6.14）式得

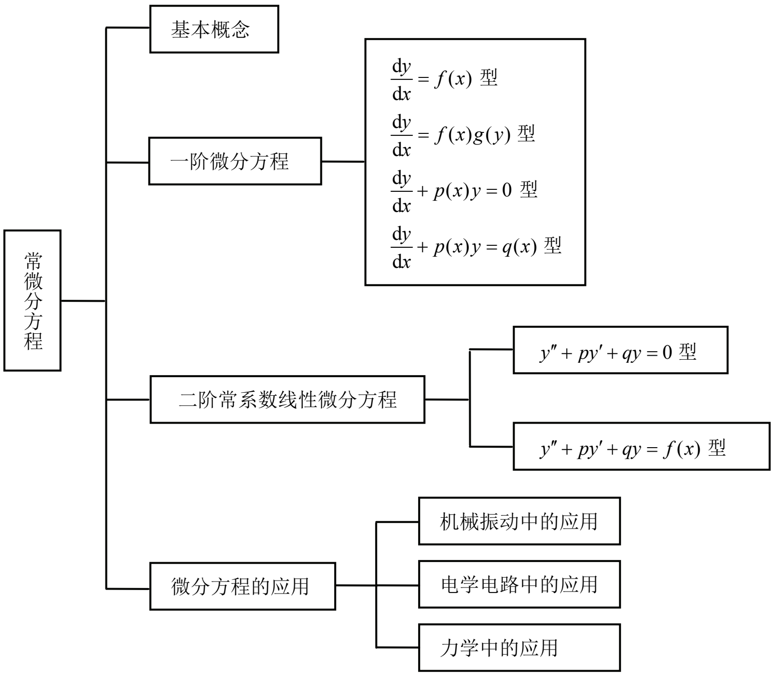
$$v_0=\sqrt{2gR}$$

代入 $g=9.8\times10^{-3}\mathrm{km/s^2}$，$R=6370\mathrm{km}$，得

$$v_0=11.2\mathrm{km/s}$$

这就是要使火箭脱离地球引力一去不复返所需的最小速度，称为第二宇宙速度或脱离速度．

本章知识结构图


常微分方程
基本概念
一阶微分方程
$\frac{dy}{dx}=f(x)$ 型
$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 型
$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 型
$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 型
二阶常系数线性微分方程
$y''+py'+qy=0$ 型
$y''+py'+qy=f(x)$ 型
微分方程的应用
机械振动中的应用
电学电路中的应用
力学中的应用

数学史话 7

泰勒（B.Taylor，1685—1731，英国数学家）

布鲁克·泰勒受教于剑桥的圣约翰学院. 在转向数学之前研究法律，由于给《皇家学会会报》写了一些论文而崭露头角. 这些论文使他当选为皇家学会会员，最后成为该会秘书. 他曾被任命到一个为了解决牛顿和莱布尼茨关于微积分发明权之争的委员会中担任委员之职. 他还给《皇家学会会报》写过各种论文，它们涉及对数(《计算对数的新方法》)、级数(《论无穷级数》)以及数学在物理和力学问题上的应用. 从 1715 年到 1717 年他放弃了数学，转向宗教和哲学.

摘自《数学史》斯科特；侯德润，张兰译

泰勒也是一个热心崇拜牛顿方法的人，曾在《增量方法及其逆》一书中发表了这些方法. 在这本书中他奠定了有限差分方法的基础. 书中还有他的单变量的幂级数展开的著名公式，即

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

泰勒公式使任意单变量函数展为幂级数成为可能，是微积分进一步发展的有力武器.

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

傅里叶（J.Fourier，1768—1830，法国数学家和物理学家）

傅里叶 1798 年曾随拿破仑远征埃及，做过南埃及的总督. 他在埃及期间写了一些科学论文. 1801 年返回法国，1808 年被封为男爵. 在这期间他继续从事科学研究，并于 1816 年成为法兰西学院院士，1823 年成为皇家学会会员. 他的巨著《热的分析理论》发表于 1822 年. 他是在研究热流问题时引出以他的名字命名的级数的.

摘自《数学史》斯科特；侯德润，张兰译

自从牛顿时代起，物理问题就成为数学发展的一个重要源泉. 18 世纪数学和物理的结合点主要是常微分方程. 随着物理科学所研究的现象从力学向电学以及电磁学扩展，到 19 世纪，偏微分方程的求解成为数学家和物理学家关注的重心，对它们的研究促进了函数论、变分法、无穷级数、常微分方程、代数、微分几何等学科的发展.

19 世纪偏微分方程发展的序幕，是由法国数学家傅里叶拉开的，他于 1822 年发表的《热的分析理论》是数学史上的经典文献之一. 傅里叶研究的主要问题是吸热或放热物体内部任何点处的温度随空间和时间的变化规律.

傅里叶将区间（$-\pi$，π）上的任何 $f(x)$ 表示为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其系数由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x，\quad n\geqslant 1$$

确定，这就是我们通常所称的傅里叶级数.

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

第 7 章　级　　数

级数是高等数学中的重要组成部分，是研究函数的性质，进行数值计算的重要工具，在科学领域中有着广泛的应用．本章在介绍级数的一些基本概念的基础上，着重介绍如何将函数展开成幂级数和傅里叶级数．

7.1　常数项级数

7.1.1　常数项级数的概念与性质

1．常数项级数的概念

引例　将长度为 1 的木棒折成两等份，去掉一份，剩余一份，去掉部分的长为$\frac{1}{2}$，剩余部分的长为$\frac{1}{2}$；将剩余部分折成两等份，再去掉一份，共去掉部分的长为$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，剩余部分的长为$\frac{1}{4}$；n 次重复这个过程，那么去掉部分的长为$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$，剩余部分的长为$\frac{1}{2^n}$，因为总长为 1，所以去掉部分与剩余部分的长度相加为 1，如此继续下去，当$n\to\infty$时，剩余部分的长$\frac{1}{2^n}\to 0$，去掉部分的长$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\to 1$．在上面讨论的过程中，无穷多项的和$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$就是下面要介绍的级数的概念，而这无穷多项的和能否等于某个数，也就是我们要讨论的级数的收敛问题，讨论过程中用到了极限的思想，极限正是讨论级数中用到的基本方法．

定义 7.1　给定数列$\{u_n\}$：u_1，u_2，u_3，…，u_n，…，则表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

称为**无穷级数**，简称**级数**，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{7.1}$$

其中，u_n 称为级数的**一般项**或**通项**．如果u_n是常数（n=1，2，…），即级数中的每一项都是常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为常数项级数．如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\cdots+1+\cdots$$

都是常数项级数.

级数（7.1）的前 n 项的和

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

称为级数的**部分和**.

定义 7.2　对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，并把 S 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**和**，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$；如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，那么称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**.

有了上述定义，我们要讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛状况，只需讨论极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是否存在.

例 1　判定无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的敛散性.

解　因为　$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned}S_n&=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n\\&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$，

因此　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，和为 1.

例 2　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 的敛散性.

解　因为　$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=\infty$，

因此　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散.

例 3　判定等比级数（或几何级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}+\cdots$$

的敛散性.

解 （1）如果 $r \neq 1$，

$$S_n=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}$$

等式两边乘以 r 得

$$rS_n=r+r^2+r^3+\cdots+r^n$$

两式相减得

$$(1-r)S_n=1-r^n\text{，即}$$

$$S_n=\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{1}{1-r}-\frac{r^n}{1-r}$$

当 $|r|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{1}{1-r}$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ 收敛，和为 $\dfrac{1}{1-r}$.

当 $|r|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ 发散.

（2）如果 $|r|=1$，且当 $r=1$ 时，$S_n=n$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ 发散.

当 $r=-1$ 时，$S_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}=\begin{cases}1\text{（}n\text{ 为奇数）}\\0\text{（}n\text{ 为偶数）}\end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ 发散.

综合上面的讨论，得当 $|r|<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ 收敛，其和为 $\dfrac{1}{1-r}$；当 $|r|\geqslant 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ 发散.

2．级数的基本性质

性质 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，$k\neq 0$ 为常数，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 kS.

性质 2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于 T，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S\pm T$.

性质 3 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 中去掉或加上有限项，不改变级数的收敛性，但收敛时，和会有变化.

性质 4 级数收敛的必要条件是：如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

需要注意的是性质 4 的逆命题不成立，也就是说，如果 $\sum\limits_{n\to\infty} u_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛. 但是，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.

例 4　判定调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$的敛散性．

解　因为当 $x>0$ 时，$x>\ln(1+x)$，对 x 取不同值，得

$$1>\ln2，\frac{1}{2}>\ln\frac{3}{2}，\cdots，\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}，$$

由此得

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}&>\ln2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\\&=\ln2+(\ln3-\ln2)+(\ln4-\ln3)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]\\&=\ln(n+1)\end{aligned}$$

即 $S_n>\ln(n+1)$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，

由此得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散．

例 5　判定级数$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$的敛散性．

解　因为级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$为等比级数，公比$r=\frac{1}{2}<1$，所以级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$收敛，而$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$是收敛级数去掉前两项得到的，根据性质 3 知该级数收敛．

7.1.2　正项级数和交错级数的敛散性判别法

下面介绍任意项级数中的两种特殊级数．

1．正项级数

常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$中，如果各项都是非负数，即$u_n\geqslant0$，那么这种级数称为**正项级数**．判定正项级数收敛．经常用到下面的定理．

定理 7.1 （比较判别法）　设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$u_n\leqslant v_n$（n=1，2，…），如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散．

定理 7.1 是判定正项级数收敛的常用方法，关键是比较两个级数的一般项u_n与v_n，我们可以简单地记为：比收敛级数一般项小的级数也收敛，比发散级数一般项大的级数也发散，而且$u_n\leqslant v_n$不一定从$n=1$项起，只要是从某一项起有$u_n\leqslant v_n$成立，仍然有上面的结论．

例 6　判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$的敛散性．

解　因为　$n(n+1)<(n+1)^2$，$\sqrt{n(n+1)}<n+1$，

所以　$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$．而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$是发散的，根据比较判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散．

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$，（$p>0$），称为$p$**—级数**，当$p>1$时，$p$—级数收敛；当$p\leqslant 1$时$p$—级数发散.

注意

利用比较判别法时需要进行两个级数一般项的比较，几个常用的级数是：等比级数，调和级数，p—级数.

例 7 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^3}}$的敛散性.

解 因为 $\frac{1}{\sqrt{1+n^3}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$为$p=\frac{3}{2}$的$p$—级数收敛，

所以 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^3}}$收敛.

在正项级数的一般项中如果出现有a^n，$n!$或者n^n等形式，利用比较判别法讨论级数的敛散性比较困难，这时用下面的比值判别法会简便一些.

定理 7.2（比值判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，那么当$\rho<1$时级数收敛；当$\rho>1$或$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$时，级数发散；当$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散.

例 8 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$的敛散性.

解 因为 $u_n=\frac{1}{n!}$，$u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)n!}$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)n!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

根据比值判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$收敛.

例 9 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$的敛散性.

解 因为 $u_n=\frac{n!}{10^n}$，$u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}=\frac{(n+1)\cdot n!}{10^n\cdot 10}$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)n!}{10^n\cdot 10}}{\frac{n!}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$，根据比值判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$发散.

2. 交错级数及其判别法

如果一个级数的各项是正负交错的，那么这个级数称为**交错级数**.

例如：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + \cdots$ 都是交错级数，其中 $u_n > 0$（n=1，2，…），都是正数．交错级数的敛散性，可利用下面的定理判别．

定理 7.3（莱布尼茨判别法） 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件

（1）$u_n \geqslant u_{n+1}$（n=1，2，3，…）；

（2）$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，

那么级数收敛，且其和 $S \leqslant u_1$．

例 10 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的敛散性．

解 这是一个交错级数，因为 $u_n = \frac{1}{n}$，$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$，所以 $u_n > u_{n+1}$，又因为 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$，根据定理 4 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛．

练习 7.1

1．判定下列级数的敛散性．

（1）$\frac{1}{4} - \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} - \frac{3^3}{4^4} + \cdots$；　（2）$2^3 + (\frac{3}{2})^3 + (\frac{4}{3})^3 + \cdots$；

（3）$\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots$；　（4）$(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}) + \cdots$．

2．用比较判别法判定下列级数的敛散性．

（1）$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{n^2+1} + \cdots$；

（2）$1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$；

（3）$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$；

（4）$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \cdots$．

3．用比值判别法判定下列级数的敛散性．

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$．

7.2 幂级数

7.2.1 幂级数的概念

定义 7.3 设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在 D 上的函数列，表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

称为定义在 D 上的**函数项级数**.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx=\sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx+\cdots$$

都是函数项级数.

我们注意到，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$

其部分和为 $S_n=\dfrac{1-x^n}{1-x}$. 当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 收敛，其和为 $\dfrac{1}{1-x}$. 我们把（-1，1）中点 x 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 的收敛点，（-1，1）称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 的收敛域. 当 $|x|\geqslant 1$ 时，级数发散. 满足 $|x|\geqslant 1$ 的点称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 的发散点，即（$-\infty$，-1］∪［1，$+\infty$）称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 的发散域.

一般地，对于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，当 x 取某值 x_0 时，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，那么点 x_0 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**；如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散，那么点 x_0 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**发散点**. 收敛点的集合称为**收敛域**，发散点的集合称为**发散域**.

在收敛域上，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和 $S(x)$ 称为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**和函数**，记做 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$，如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$，$x\in$（$-1$，1）.

定义 7.4 形如
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{7.2}$$
的函数项级数称为 x 的**幂级数**.（其中 a_0，a_1，…，a_n，…是常数，称为**幂级数的系数**）

形如
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \tag{7.3}$$
的函数项级数称为（$x-x_0$）的**幂级数**，其中 x_0 为常数，a_n 称为**幂级数的系数**.

对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，可作变换 $t=x-x_0$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

形式相同，所以下面只讨论 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 形式幂级数的收敛性.

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为（$-R$，R），那么数 R 称为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**，区间（$-R$，R）称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛区间**.

注意

（1）幂级数的收敛区间是开区间.

（2）求幂级数的收敛区间的关键是求出收敛半径 R，即得收敛区间（$-R$，R）. 本教材不讨论收敛区间两个端点$-R$、R 的收敛情况.

幂级数收敛半径的求法由下面的定理给出.

定理 7.4　对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，如果其相邻两项系数比的极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，那么

$$\rho \neq 0 \text{ 时，} R = \frac{1}{\rho}$$

$$\rho = 0 \text{ 时，} R = +\infty$$

$$\rho = +\infty \text{ 时，} R = 0$$

例 1　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径与收敛区间.

解　因为 $a_n = \frac{1}{n}$，$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

所以收敛半径 $R = 1$，收敛区间为（-1，1）.

例 2　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径与收敛区间.

解　因为 $a_n = \frac{1}{n!}$，$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)n!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

所以收敛半径 $R = +\infty$，收敛区间为（$-\infty$，$+\infty$）.

例 3　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 的收敛半径与收敛区间.

解　因为 $a_n = n!$，$a_{n+1} = (n+1)! = (n+1)n!$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}|(n+1)| = +\infty$$

所以收敛半径 $R=0$，级数只在 $x=0$ 点处收敛.

例 4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛半径与收敛区间.

解 令 $t=x-1$，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$.

因为 $a_n=\frac{1}{n}$，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = 1$$

所以收敛半径 $R=1$，$-1<t<1$，即 $0<x<2$. 因此原级数的收敛区间为（0，2）.

7.2.2 幂级数的和函数的性质

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间（$-R$，R）上可积，且可以逐项积分，即

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

其收敛半径与 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径相同.

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间（$-R$，R）上可导，且可以逐项求导，即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)' = \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

其收敛半径与 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径相同.

例 5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛区间及和函数.

解 因为 $a_n=n$，$a_{n+1}=n+1$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，

所以收敛半径 $R=1$，收敛区间为（-1，1）.

在收敛区间（-1，1）内设和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，根据性质 2，逐项积分得

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{x}{1-x}$$

两边求导得 $S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的和函数为 $\frac{1}{(1-x)^2}$.

7.2.3　函数展开成幂级数

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$， $x \in$（-1，1）．所以当 $x \in$（-1，1）时有
$\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$．

我们看到一个函数可以用一个级数来表示，称为函数的幂级数展开式．

定义 7.5　设函数 $f(x)$ 在（$x_0 - R$， $x_0 + R$）内有各阶导数，那么

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \qquad (7.4)$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点处的**幂级数**，也称为函数 $f(x)$的泰勒级数，泰勒展开式．

在 $x_0 = 0$ 时，（7.4）式变成

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \qquad (7.5)$$

称为函数 $f(x)$ 在 0 点处的**幂级数**．

（7.4）式写出的幂级数在（$x_0 - R$， $x_0 + R$）内是否收敛于 $f(x)$ 呢？或者说 $f(x)$ 是否是（7.4）式的和函数呢？下面两个定理回答了这个问题．

定理 7.5　如果函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ 内有 $n+1$ 阶导数，那么

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad （\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}）$$

定理 7.6　函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的幂级数（7.4）的和函数等于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \qquad x \in （x_0 - R,\ x_0 + R）$$

若幂级数（7.4）式收敛于 $f(x)$，则称（7.4）式为 $f(x)$ 的 $(x - x_0)$ 的幂级数展开式，即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$
$$x \in （-R,\ R）$$

若幂级数（7.5）式收敛于 $f(x)$，则称（7.5）式为 $f(x)$ 的 x 的幂级数展开式，即

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,\quad x \in （-R,\ R）$$

下面来研究将函数展开成幂级数的方法．

1．直接展开法

将 $f(x)$ 展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数的步骤：

（1）求出 $f(x)$ 在 x_0 点处的各阶导数 $f'(x_0)$， $f''(x_0)$， $\cdots$， $f^{(n)}(x_0)$， $\cdots$；

（2）按（7.4）式写出幂级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots;$$

（3）求出幂级数的收敛半径 R，并写出收敛区间（$x_0 - R$， $x_0 + R$）；

（4）考察在（x_0-R，x_0+R）内，是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则在 x_0 点处写出的幂级数就是在（x_0-R，x_0+R）内 $f(x)$ 的 $(x-x_0)$ 的幂级数展开式.

例 6 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x\ (n=1, 2, \cdots)$，$f^{(n)}(0)=\mathrm{e}^0=1$，

所以得幂级数 $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}\right|=0$，

所以收敛半径 $R=+\infty$，收敛区间为（$-\infty$，$+\infty$）.

对于任何有限数 x、ξ（ξ 在 0 与 x 之间），余项的绝对值

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\text{，即有 }\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

所以

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (-\infty, +\infty)$$

用同样的方法可以得到下列函数的 x 的幂级数展开式.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \qquad (-1, 1)$$

利用直接展开法将函数 $f(x)$ 展开成幂级数时计算复杂，过程烦琐，因此我们经常采用间接展开法.

2. 间接展开法

利用已知函数的幂级数展开式及逐项积分，逐项求导等性质，将函数展开成幂级数.

例 7 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $(\sin x)'=\cos x$，而

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty, +\infty)$$

对上式逐项求导，得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad (-\infty, +\infty)$$

例 8 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$

利用

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

所以
$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+\cdots+(\frac{x}{2})^n+\cdots\right]\qquad\left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\qquad(-2<x<2)$$

例 9　将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解　因为 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3+(x-3)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-(-\dfrac{x-3}{3})}$

利用
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\qquad(-1<x<1)$$

所以
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{x-3}{3}+\frac{(x-3)^2}{3^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^n}+\cdots\right]\qquad\left(\left|\frac{x-3}{x}\right|<1\right)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{(x-3)^n}{3^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}\qquad(0<x<6)$$

练习 7.2

1．求下列幂级数的收敛半径与收敛区间.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2\cdot4\cdot\ \cdots\ \cdot(2n)}$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$；　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^n$；　（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x+1)^n}{n}$.

2．将下列函数展开成 x 的幂级数.

（1）$\dfrac{1}{2+x}$；　（2）$\sin\dfrac{x}{2}$；　（3）e^{-x}；

（4）$\arctan x$；　（5）$\dfrac{x}{1-x^2}$；　（6）$\dfrac{1}{x-a}$.

3．将函数 $\dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

4．将函数 e^x 展开成 $x+2$ 的幂级数.

7.3　傅里叶级数

傅里叶级数在数学、物理及许多工程技术领域中都有着广泛的应用.

7.3.1 傅里叶级数及其收敛性

1．三角级数和三角函数系的正交性

在函数项级数中，除了幂级数以外，较常见的还有三角级数．

形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的级数称为**三角级数**，其中 a_0， a_n， b_n（n=1，2，…）为常数．

在三角级数的表达式中出现了 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 等形式的三角函数，当 n 取不同值时得到一系列三角函数， $\cos x$， $\sin x$， $\cos 2x$， $\sin 2x$ 等，三角函数系

$$1，\ \cos x，\ \sin x，\ \cos 2x，\ \sin 2x，\ \cdots，\ \cos nx，\ \sin nx，\ \cdots$$

在区间［$-\pi$，π］上正交，其含义是上述任意两个不同函数的乘积在区间［$-\pi$，π］上的积分等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0 \qquad （n=1，2，3，\cdots）$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0 \qquad （n=1，2，3，\cdots）$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0 \qquad （k，n=1，2，3，\cdots）$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0 \qquad （k，n=1，2，3，\cdots，k\neq n）$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0 \qquad （k，n=1，2，3，\cdots，k\neq n）$$

下面研究一个函数 $f(x)$ 如何表示成一个三角级数的问题．

2．傅里叶级数及收敛定理

设 $f(x)$ 是周期为 2π的函数，假定 $f(x)$ 能展开成三角级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{7.6}$$

要想确定三角级数的具体形式，就要确定 a_0， a_k， b_k 的具体数值．

先求 a_0．对（7.6）式两边从$-\pi$ 到π 逐项积分，得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\\&=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi\\&=a_0\pi\end{aligned}$$

于是得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

再求 a_n．对（7.6）式两边乘 $\cos nx$ 再从$-\pi$ 到π 逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos nx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x$$
$$=a_n\pi$$

于是得
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

再求 b_n．类似地，对（7.6）式两边乘 $\sin nx$ 再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分，可得
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

这样就得到 a_0，a_n，b_n（n=1，2，3，…）与函数 $f(x)$ 的关系式为
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\qquad（n=1，2，3，\cdots）\tag{7.7}$$

a_0，a_n，b_n 称为函数 $f(x)$ 的**傅里叶系数**.

定义 7.6　如果三角级数
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\tag{7.8}$$
中的系数为傅里叶系数，那么（7.8）式称为函数 $f(x)$的**傅里叶级数**．这个级数能否收敛于函数 $f(x)$，还需要满足什么条件？有下面的收敛定理.

定理 7.7（收敛定理，狄利克莱充分条件）　设以 2π为周期的函数 $f(x)$ 在［$-\pi$，π］上满足：连续或只有有限个第一类间断点，且最多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

从收敛定理我们可以看出，如果函数 $f(x)$ 在［$-\pi$，π］上只有有限个第一类间断点，且所作的振动也是有限次的，那么傅里叶级数在连续点处收敛于 $f(x)$，在间断点处收敛于左、右极限的算术平均值.

7.3.2　函数展开成傅里叶级数

1．在［$-\pi$，π］上展开成傅里叶级数

给出一个定义在［$-\pi$，π］上的函数 $f(x)$，使它延拓成以 2π为周期的周期函数，按照式（7.7）计算出傅里叶系数 a_0，a_n，b_n，就可以将 $f(x)$ 在［$-\pi$，π］上展开成傅里叶级数.

例 1　将函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0;\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解　将 $f(x)$ 延拓成以 2π为周期的周期函数，函数 $f(x)$ 在［$-\pi$，π］上满足收敛定理的条件.

当 $x\neq-\pi$、0、π 时，$f(x)$ 连续，那么
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nx\mathrm{d}x \\
&= 0 \qquad\qquad (n=1，2，3，\cdots) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} - \frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) \\
&= \frac{2}{n\pi}\,[\,1-(-1)^n\,] \\
&= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & n=1, 3, 5, \cdots \\ 0, & n=2, 4, 6, \cdots \end{cases}
\end{aligned}
$$

由求出的傅里叶系数 a_0， a_n， b_n 可以得出函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$
f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \cdots\right]（-\pi \leqslant x \leqslant \pi；\ x \neq -\pi、0、\pi）
$$

在间断点 $x=-\pi$、0、π 处，级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$.

和函数的图形如图 7-1 所示.

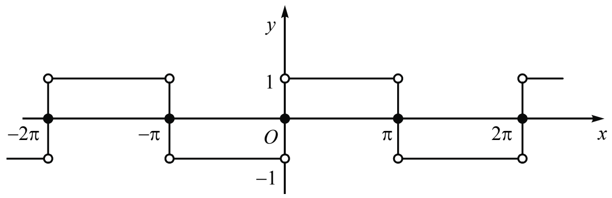


图 7-1

2．在［0，π］上展开成傅里叶级数

当周期为 2π的奇函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时， $f(x)\cos nx$ 为奇函数， $f(x)\sin nx$ 为偶函数，那么

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0 \qquad (n=1，2，3，\cdots) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad (n=1，2，3，\cdots)
\end{aligned}
$$

这时，由上面傅里叶系数 a_0， a_n， b_n 得到的傅里叶级数

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx
$$

只含有正弦函数项，称为**正弦级数**.

当周期为 2π的偶函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时， $f(x)\cos nx$ 为偶函数， $f(x)\sin nx$ 为奇函数，那么

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=1，2，3，\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0 \quad (n=1，2，3，\cdots)$$

这时，由上面傅里叶系数 a_0，a_n，b_n 得到的傅里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

只含有余弦函数项，称为**余弦级数**.

对于定义在［0，π］上的奇函数（或偶函数）$f(x)$，可以补充函数 $f(x)$ 在［−π，0］上的定义，得到定义在［−π，π］上的奇函数（或偶函数），称为**奇延拓（或偶延拓）.**

按照上面给出的计算正弦级数（或余弦级数）系数的方法可以将函数 $f(x)$ 在［0，π］上展开成正弦级数（或余弦级数）.

例 2　将函数 $f(x)=x$ 在［0，π］上展开成正弦级数.

解　将 $f(x)$ 先延拓在[−π，π]上，然后再延拓成以 2π为周期的周期函数，函数 $f(x)=x$ 在［0，π］上连续，正弦级数的系数为

$$a_0=0，\quad a_n=0$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right)\\&=-\frac{2\cos n\pi}{n}\\&=(-1)^{n+1}\frac{2}{n} \quad (n=1，2，3，\cdots)\end{aligned}$$

由求出的系数 a_0，a_n，b_n 可以得出函数 $f(x)=x$ 在［0，π］上的正弦级数展开式为

$$x=2(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots) \quad (0\leqslant x<\pi)$$

在间断点 $x=\pi$ 处，级数收敛于 $\frac{-\pi+\pi}{2}=0$.

和函数的图形如图 7-2 所示.

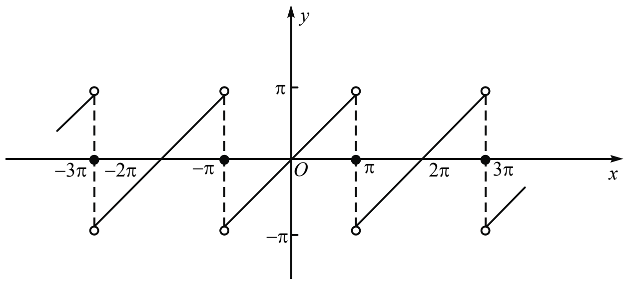


图 7-2

3. 在［$-l$，l］上展开成傅里叶级数

在实际应用问题如线性电路的谐波分析法中所遇到的展开成傅里叶级数的函数，其周期往往不是 2π，为此，有必要介绍一下周期为 $2l$ 的函数展开成傅里叶级数.

定理 7.8 设函数 $f(x)$ 在区间［$-l$，l］上满足收敛定理的条件，则 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

其中

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

在间断点 x 处，级数收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

根据定理 7.8，我们可以将函数 $f(x)$ 在［$-l, l$］上展开成傅里叶级数，也将原来的区间［$-\pi$，π］拓展到［$-l$，l］.

例 3 将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0;\\ 1, & 0\leqslant x<2\end{cases}$ 在［-2，2］上展开成傅里叶级数.

解 将 $f(x)$ 延拓成以 4 为周期的周期函数，函数 $f(x)$ 在［-2，2］上满足收敛定理的条件，当 $x\neq-2$、0、2 时，$f(x)$ 连续，那么

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}1\mathrm{d}x\right)\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\\&=-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

由求出的傅里叶系数 a_0，a_n，b_n 可以得出函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right)\quad(-2<x<2;\ x\neq 0)$$

在间断点 $x=-2$， 0，2 处，级数收敛于 $\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

和函数的图形如图 7-3 所示.

在电路分析中会用到傅里叶级数，如图 7-4 所示的方波信号，周期为 T=2 s，角频率为 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\pi\ (\mathrm{rad/s})$.

它的傅里叶级数展开式为 $U(t)=\dfrac{4U_m}{\pi}\left[\sin(\pi t)+\dfrac{\sin(3\pi t)}{3}+\dfrac{\sin(5\pi t)}{5}+\cdots\right]$.

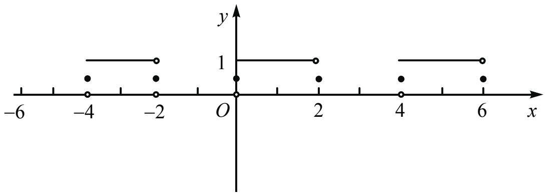


图 7-3

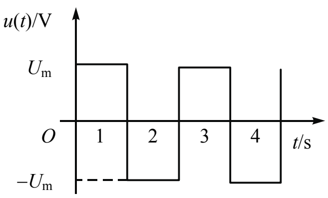
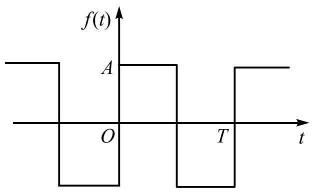
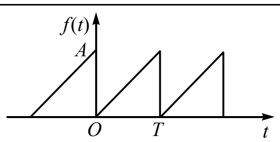
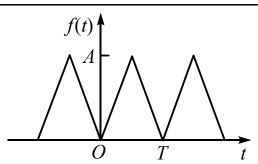


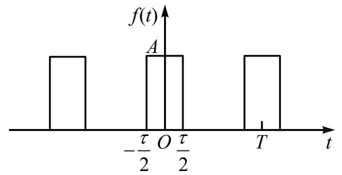
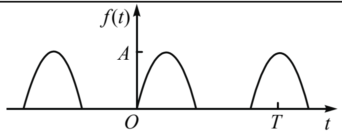
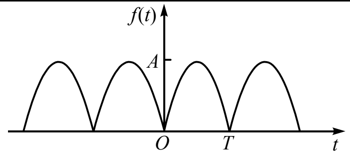
图 7-4

工程上常见的以 T 为周期，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ 为角频率的函数 $f(t)$ 的傅里叶级数如表 7-1 所示.

表 7-1

函　　数	傅里叶级数
	$f(t)=\dfrac{4A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2k-1}\sin\left[(2k-1)\omega t\right]$
	$f(t)=\dfrac{A}{2}-\dfrac{A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(k\omega t)}{k}$
	$f(t)=\dfrac{A}{2}-\dfrac{4A}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos\left[(2k-1)\omega t\right]$

续表

函　数	傅里叶级数
	$f(t)=\dfrac{A\tau}{T}+\dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\sin(\dfrac{k\pi t}{T})\cos(k\omega t)$
	$f(t)=\dfrac{A}{\pi}+\dfrac{A}{2}\sin(\omega t)-\dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}\cos(2k\omega t)$
	$f(t)=\dfrac{2A}{\pi}-\dfrac{4A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}\cos(k\omega t)$

练习 7.3

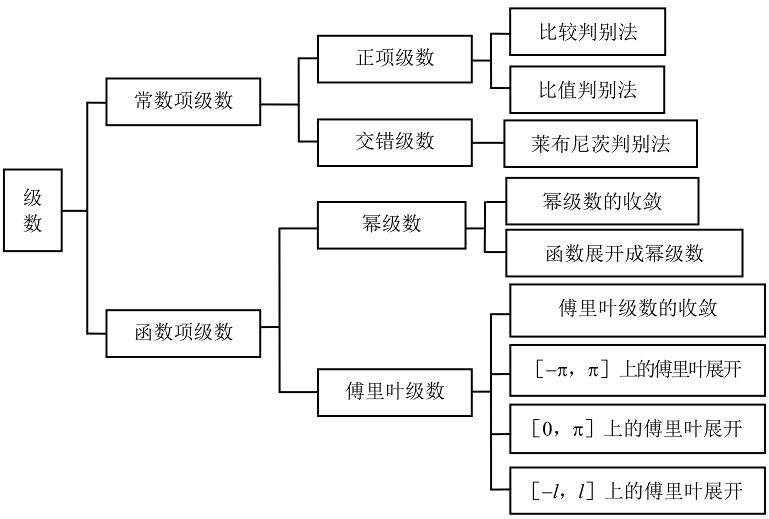
1．将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<0;\\ 0, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

2．将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x<0;\\ x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

3．将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ 在［0，π］上展开成正弦级数.

4．将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0;\\ A, & 0\leqslant x<2\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

本章知识结构图



第 8 章　矩阵与线性方程组

从 19 世纪中叶以来，矩阵代数已经以现在这种形式存在，它由哈密顿、凯利及西而维斯特所发明，长期以来一直是代数的一个专门分支，直到20 世纪 20 年代，它才成为量子力学的工具．现在矩阵成为普通数学教育的一部分，它在数值分析与所有其他应用数学分支中有着广泛的应用．

摘自《数学概论》L・戈丁

矩阵是从实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念，在自然科学、工程技术及经济管理中有着重要的应用．本章主要介绍矩阵、几种特殊的矩阵、矩阵的秩、逆矩阵，矩阵的加减法、数乘、乘法、转置等矩阵运算及运算规律，矩阵的初等行变换及利用初等行变换求矩阵的秩与逆矩阵的方法，利用矩阵来研究线性方程组的解．

8.1　矩阵的概念

8.1.1　矩阵的定义

矩阵是实数的矩形阵表，先看下面的问题．

引例　某工厂有甲、乙、丙三个车间，生产 A、B、C、D 四种产品（单位：吨），生产情况如表 8-1 所示．

表 8-1

车间 \ 产量（吨） \ 产品	A	B	C	D
甲	2	1	3	5
乙	3	2	2	3
丙	5	6	0	1

以上的生产情况可以用数表来表示

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这样的矩形数表称为矩阵

定义 8.1　由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1$，2，$\cdots$，m；$j=1$，2，$\cdots$，n）排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m **行** n **列矩阵**，简称 $m\times n$ **矩阵**．其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行 j 列元素．

常用大写字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、…表示矩阵，也可以将矩阵表示为 (a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$、$\boldsymbol{A}_{m\times n}$．

矩阵的行数 m 与列数 n 可以是任意的正整数．

$m=n$ 时的矩阵称为 n **阶方阵**，也称为 n **阶矩阵**，形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中，从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 称为**主对角线元素**，从右上角到左下角的对角线称为**次对角线**．

只有一行的矩阵称为**行矩阵**，只有一列的矩阵称为**列矩阵**，即矩阵（a_{11}，a_{12}，…，a_{1n}）是行矩阵，矩阵 $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ 是列矩阵．特别地，规定 $(a)_{1\times 1}=a$．

所有元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记做 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$．

例如，$\boldsymbol{O}_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{O}_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，分别是 2×3 零矩阵和二阶零矩阵．

8.1.2　特殊的矩阵

定义 8.2　主对角线下（或上）方的元素都是零的 n 阶方阵称为 n **阶上（或下）三角矩阵**．

例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 是三阶上三角矩阵．

定义 8.3　主对角线上的元素是 1，其余元素都是 0 的 n 阶方阵称为 n **阶单位矩阵**，记做 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$．

例如，$\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 分别是二阶和三阶单位矩阵．

练习 8.1

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$，　写出 a_{23}，a_{31}．

2．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & b-3 \end{pmatrix}$ 为二阶单位矩阵，求 a，b 的值．

8.2　矩阵的运算

8.2.1　矩阵的相等

如果两个矩阵的行数、列数分别相等，并且各对应元素相等，则称这两个矩阵相等，记做 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 中，若 $a_{ij}=b_{ij}$（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n），则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$．

8.2.2　矩阵的加法

定义 8.4　设有两个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应元素相加．

注意

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数、列数必须分别相等，否则不能相加.

例 1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$．

解　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1+(-2) & 3+1 \\ 2+3 & 0+2 \\ -1+1 & 4+(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

例 2　设某物资（单位：吨）从三个产地运往四个销地，一、二月份的调运计划分别用矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 表示

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

求一月和二月从各产地到各销地的调运总量.

解　调运总量可以用矩阵表示为

$$A+B=\begin{pmatrix}3+2 & 7+1 & 4+3 & 2+0\\ 2+2 & 0+5 & 1+2 & 3+5\\ 4+3 & 3+2 & 7+0 & 0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8 & 7 & 2\\ 4 & 5 & 3 & 8\\ 7 & 5 & 7 & 6\end{pmatrix}$$

矩阵的加法满足以下运算规律（设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵）：

（1）交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

（2）结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$．

8.2.3 数乘矩阵

定义 8.5 数 k 与 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$，用数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素所得到的 $m\times n$ 矩阵，称为数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$．记做 $k\boldsymbol{A}$，即

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}$$

特别地，当 $k=-1$ 时，$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，习惯上称之为矩阵减法.

数与矩阵的乘法满足以下运算规律（设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，k 、l 为常数）：

（1）$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；

（2）$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

（3）$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$．

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 5 & 0 & -6\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}$．

解
$$\begin{aligned}3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}&=3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 5 & 0 & -6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 0\\ 15 & 0 & -18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -6\\ 7 & -10 & -30\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$．

解 由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 可以得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\\ &=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 5　两条生产线分别加工三种产品（单位：件），将一月份的加工量表示为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}120 & 90 & 100\\ 80 & 110 & 120\end{pmatrix}$，且每件产品的加工费都是 2 元，求各生产线每种产品应付的加工费.

解　所求加工费可以表示为矩阵

$$2\boldsymbol{A}=2\begin{pmatrix}120 & 90 & 100\\ 80 & 110 & 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}240 & 180 & 200\\ 160 & 220 & 240\end{pmatrix}$$

8.2.4　矩阵的乘法

定义 8.6　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}$$

则 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**，记做 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad（i=1，2，\cdots，m；j=1，2，\cdots，n）$$

注意

（1）只有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，才能做乘法运算 $\boldsymbol{AB}$；

（2）乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于 A 的行数，列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数；

（3）$\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行各元素与第 j 列各对应元素乘积的代数和.

例 6　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times(-2)+2\times3 & 2\times3+2\times1\\ 1\times(-2)+3\times3 & 1\times3+3\times1\\ (-2)\times(-2)+1\times3 & (-2)\times3+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 7 & 6\\ 7 & -5\end{pmatrix}$$

在例 6 中 $\boldsymbol{A}$ 是 3×2 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 2×2 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不能相乘，说明

矩阵乘法不满足交换律.

例 7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{BA}=(1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1\times1+2\times2+3\times3=14$

例 8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$ 、$\boldsymbol{BA}$、$\boldsymbol{AC}$ 、$\boldsymbol{AD}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3\\3 & 3\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\-3 & 0\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{AD}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\-3 & 0\end{pmatrix}$

注意

（1）两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵；

（2）矩阵乘法不满足交换律. 一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

（3）矩阵乘法不满足消去律. 当 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AD}$ 时，不一定有 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$ 成立.

矩阵乘法满足以下运算规律（设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 、$\boldsymbol{C}$ 为矩阵，k 为常数，并假设以下运算都是可行的）

（1）$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（2）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

（3）$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

定义 8.7 当 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵时，用 $\boldsymbol{A}^k$ 表示 k 个 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，其中 k 是正整数，且有

（1）$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

（2）$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

当 $k=0$ 时，规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

注意

一般地，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

例 9　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3$．

解　$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

8.2.5　转置矩阵

定义 8.8　将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列按顺序互换得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记做 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=(0\quad 1\quad 2\quad -1)^{\mathrm{T}}$

例 10　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．

解　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 13\end{pmatrix}$

例 11　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．

解　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 6 & 8\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ 0 & 8 & 5\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ 0 & 8 & 5\end{pmatrix}$

由例 11 结果看出：$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．

转置矩阵满足以下运算规律（并假设以下运算都是可行的）：

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

（3）$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．

练习 8.2

1．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 5 & -3 & 0\end{pmatrix}$，求：

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$； （2）$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$； （3）$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$．

2．计算．

（1）$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$； （2）$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 5\end{pmatrix}$．

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{C}$．

8.3 矩阵的初等变换与矩阵的秩

8.3.1 矩阵初等变换的概念

矩阵的初等变换有初等行变换和初等列变换，下面仅介绍初等行变换．

定义 8.9 对矩阵进行以下三种变换，称为矩阵的**初等行变换**．

（1）交换第 i，j 两行位置（记做 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

（2）用一个非零数 k 乘以第 i 行的每个元素（记做 kr_i）；

（3）用一个非零数 k 乘以第 j 行的每个元素后，再加到第 i 行的对应元素上（记做 r_i+kr_j）．

8.3.2 行阶梯形矩阵

矩阵中元素不全为零的行称为**非零行**，元素全为零的行称为**零行**，非零行左起第一个不为零的元素称为**首非零元**．

定义 8.10 满足以下条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**．

（1）如果矩阵中有零行，那么零行全在非零行的下方；

（2）下一行首非零元一定在上一行首非零元的右下方，即各行首非零元所在列中，首非零元下方的元素全是零．

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 8 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$是行阶梯形矩阵．

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$不是行阶梯形矩阵．

任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，经有限次初等行变换，都可以化为一个行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**行阶梯形矩阵**．

例 1　利用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&1&0\\0&1&3&-4\\1&2&5&1\end{pmatrix}$ 化为行阶梯形矩阵.

解　$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&1&0\\0&1&3&-4\\1&2&5&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&5&1\\0&1&3&-4\\2&3&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&5&1\\0&1&3&-4\\0&-1&-9&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&5&1\\0&1&3&-4\\0&0&-6&-6\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{B}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵，对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 继续进行初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&5&1\\0&1&3&-4\\0&0&-6&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{6}r_3}\begin{pmatrix}1&2&5&1\\0&1&3&-4\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-5r_3]{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&-4\\0&1&0&-7\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&10\\0&1&0&-7\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{C}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵，说明行阶梯形矩阵不唯一．矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵.

定义 8.11　对于行阶梯形矩阵，如果满足

（1）各非零行的首非零元全是 1；

（2）各非零行的首非零元所在列的其他元素全是零，

那么这个矩阵称为**行最简形矩阵**.

任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，经有限次初等行变换，都可以化为一个行最简形矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**行最简形矩阵**.

8.3.3　矩阵的秩

定义 8.12　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵中非零行的行数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记做 $r(\boldsymbol{A})$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&5&2\\0&3&6&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&4&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$，

那么　$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\boldsymbol{B})=3$.

8.3.4　矩阵的秩的求法

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵，那么行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-1&-4&-2\\3&4&11&8\end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-1&-4&-2\\3&4&11&8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&2\\3&4&11&8\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&2\\0&-2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 已经化为行阶梯形矩阵．所以 $r(\boldsymbol{A})=2$.

定义 8.13 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，而且 $r(\boldsymbol{A})=n$，那么称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**.

例如，$\begin{pmatrix}1&3&5\\0&4&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 都是满秩矩阵.

例 3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\2&3&2\end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\2&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\0&5&0\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=3$.

练习 8.3

1．判断下列矩阵是否为行阶梯形矩阵.

（1）$\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\0&1&5&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}2&-1&-3&4\\0&0&1&5\\0&0&5&-3\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&2&3&-1\\0&3&4&1\\0&0&5&2\end{pmatrix}$；（4）$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&0&5&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2．将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$ 化为行阶梯形矩阵.

3．求下列矩阵的秩．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$；　（3）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$．

4．将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵．

8.4　逆矩阵

8.4.1　逆矩阵的概念与性质

1．逆矩阵的定义

定义 8.14　对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，满足

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为可逆矩阵，简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆，把 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记做 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$．

同样也可以说矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆，$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$．

例 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

因为　$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即　$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$．

2．逆矩阵的性质

逆矩阵具有以下性质（设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵）：

性质 1　如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的．

性质 2　如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$．

性质 3　如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $k\neq 0$，那么 $k\boldsymbol{A}$ 也可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$．

性质 4　如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$．

性质 5　如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，那么 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$．

8.4.2　逆矩阵的求法

1．矩阵可逆的条件

定理 8.1　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵，即 $r(\boldsymbol{A})=n$．

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 1\\ -2 & 0 & 6\end{pmatrix}$，判断 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 是否可逆.

解 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

即 $r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

因为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 1\\ -2 & 0 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-\frac{3}{2}r_1}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & \dfrac{5}{2}\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & \dfrac{5}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

即 $r(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{B}$ 不是满秩矩阵，所以 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

2．逆矩阵的求法

任何一个矩阵都可以通过初等行变换化为行最简型矩阵，一个满秩 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简型矩阵，是一个 n 阶单位矩阵.

设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

记做
$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1\end{array}\right)$$

此为 $n\times 2n$ 矩阵.

定理 8.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，对 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 经过一系列的初等行变换，可以得到

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$$

由定理 8.2 可知求逆矩阵的方法：在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右边写上一个同阶的单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，构成一个 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$，用初等行变换将左边的 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，与此同时，右边的 $\boldsymbol{E}$ 就被化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

注意

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 中左边的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换后如果出现零行，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

例 3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cc:cc}2 & 1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc:cc}2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cc:cc}1&1&-2&1\\2&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc:cc}1&1&-2&1\\0&-1&5&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&3&-1\\0&-1&5&-2\end{array}\right)\xrightarrow{-r_2}\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&3&-1\\0&1&-5&2\end{array}\right)=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$$

所以　$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$.

例 4　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&-2&-1\\-1&3&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&0&1&1&0&0\\1&-2&-1&0&1&0\\-1&3&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-1&0&1&0\\2&0&1&1&0&0\\-1&3&2&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-1&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-1&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-4r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-1&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-1&1&-6&-4\end{array}\right)\xrightarrow{-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-1&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&0&-1&7&4\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-3&-2\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&-6&4\end{array}\right)$$

$$=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$$

所以　$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$.

例 5　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-1&6\\4&0&5\\-6&-1&1\end{pmatrix}$，问 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆？如果可逆，求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-2&-1&6&1&0&0\\4&0&5&0&1&0\\-6&-1&1&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-2&-1&6&1&0&0\\0&-2&17&2&1&0\\0&2&-17&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-2&-1&6&1&0&0\\0&-2&17&2&1&0\\0&0&0&-1&1&1\end{array}\right)$$

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 中左边的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换后出现零行，所以 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

应用逆矩阵可以求解简单的矩阵方程（含有未知矩阵的方程）.

例 6　求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

解　因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，对方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$(\boldsymbol{XA})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{AA}^{-1})=\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$$

应用初等行变换可得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -5\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -8\\ 6 & 10\end{pmatrix}$

例 7　求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E})+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

解　由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E})+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$$

而　$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

应用初等行变换可得 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

所以　$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

练习 8.4

1．判别下列方阵是否可逆，若可逆，求逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$；　（3）$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

2．解下列矩阵方程.

（1）$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$；　（2）$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

8.5　线性方程组的矩阵形式

含有 n 个未知量，m 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{8.1}$$

若常数 b_1，b_2，…，b_m 不全为零，方程组称为**非齐次线性方程组**；若 b_1，b_2，…，b_m 全为零，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

称为**齐次线性方程组**.

非齐次线性方程组（8.1）的**矩阵形式**为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

其中，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为（8.1）的**系数矩阵**；$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 称为**未知量矩阵**；$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 称为**常数矩阵**.

将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与常数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 放在一起构成

$$(\boldsymbol{AB}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ 称为（8.1）的**增广矩阵**.

齐次线性方程组（8.2）的**矩阵形式**为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$$

例　写出线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$ 的增广矩阵 $(\boldsymbol{AB})$ 及方程组的矩阵表示形式.

解

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{AB}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

矩阵形式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，即

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&4&1&1\\-1&-2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}$$

练习 8.5

写出以下线性方程组的系数矩阵、常数矩阵和增广矩阵.

（1）$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3-x_4=1\\2x_1+x_2+2x_3-5x_4=2\\-x_1+3x_2+7x_3-4x_4=0\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4=1\\2x_1+3x_3+x_4=5\\3x_1-x_2+5x_3=-2\end{cases}$

8.6 线性方程组的解法

8.6.1 齐次线性方程组的解法

1．齐次线性方程组解存在的判定

定理 8.3 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 一定有解，且

（1）当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，只有零解；

（2）当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，有非零解，且为无穷多解.

例 1 判定齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$ 解的状况.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$r(\boldsymbol{A})=2<4=n$，所以有非零解.

2．齐次线性方程组的求解方法

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 可按以下的步骤求解：

先写出系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，利用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵，可判定解的状况，再利用初等行变换将阶梯形矩阵化为行最简型矩阵，此矩阵所对应的方程组与原方程组同解，即可得出方程组的一般解.

例 2 解齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3+3x_4=0\\2x_1+4x_2-x_3+x_4=0\\3x_1+x_2+x_3+4x_4=0\end{cases}$

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&2&3\\2&4&-1&1\\3&1&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-3&2&3\\0&10&-5&-5\\0&10&-5&-5\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-3&2&3\\0&10&-5&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{10}r_2}\begin{pmatrix}1&-3&2&3\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$r(\boldsymbol{A})=2<4=n$，有非零解，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3-\frac{3}{2}x_4\\x_2=\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\end{cases}$$

x_3，x_4可取任意值，称为**自由未知量**，令$x_3=c_1$，$x_4=c_2$（c_1，c_2为任意常数），那么方程组的解可写为

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}c_1-\frac{3}{2}c_2\\x_2=\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2\\x_3=c_1\\x_4=c_2\end{cases}$$

称为方程组的**一般解**，以上的求解方法称为**消元法**.

8.6.2　非齐次线性方程组的解法

1．非齐次线性方程组解存在的判定

定理 8.4　n元非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解的充分必要条件是其系数矩阵与增广矩阵的秩相等，即

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AB})$，且

（1）当$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AB})=n$时，有唯一解；

（2）当$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AB})<n$时，有无穷多解.

例 3　判定非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=1\\3x_1+7x_2-6x_3=2\\4x_1+8x_2-6x_3=3\end{cases}$ 解的状况.

解　$(\boldsymbol{AB})=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\3&7&-6&2\\4&8&-6&3\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&1&0&-1\\0&0&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&3\\0&1&0&-1\\0&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&-2&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所以$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AB})=3=n$，有唯一解.

而增广矩阵已经化成了行最简型，所以方程组的解也很容易得出.

原方程组的解为$\begin{cases}x_1=2\\x_2=-1\\x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}$

例 4 讨论当λ取何值时，线性方程组$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda\end{cases}$有解.

解 $(\boldsymbol{AB})=\begin{pmatrix}2&-1&1&1&1\\1&2&-1&4&2\\1&7&-4&11&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&4&2\\2&-1&1&1&1\\1&7&-4&11&\lambda\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&5&-3&7&\lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&0&0&0&\lambda-5\end{pmatrix}$$

当$\lambda-5=0$，即$\lambda=5$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AB})=2<4=n$，所以方程组有解，且有无穷多解.

2．非齐次线性方程组的求解方法

非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$可按以下步骤求解：

先写出增广矩阵$(\boldsymbol{AB})$，利用初等行变换将$(\boldsymbol{AB})$化为行阶梯形矩阵，可判定解的状况，再利用初等行变换将行阶梯形矩阵化为行最简型矩阵，此矩阵所对应的方程组与原方程组同解，即可得出方程组的一般解.

例 5 解非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=5\\2x_1+x_2+x_3=2\\x_1+x_2+5x_3=-7\end{cases}$

解 $(\boldsymbol{AB})=\begin{pmatrix}1&3&1&5\\2&1&1&2\\1&1&5&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&1&5\\0&-5&-1&-8\\0&-2&4&-12\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&3&1&5\\0&-5&-1&-8\\0&1&-2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&3&1&5\\0&1&-2&6\\0&-5&-1&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+5r_2}\begin{pmatrix}1&3&1&5\\0&1&-2&6\\0&0&-11&22\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{11}r_3}\begin{pmatrix}1&3&1&5\\0&1&-2&6\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\begin{pmatrix}1&3&0&7\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AB})=3=n$，有唯一解 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=-2\end{cases}$

例 6　解非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=1\\2x_1+4x_2+x_3+x_4=5\\-x_1-2x_2-2x_3+x_4=-4\end{cases}$

解　$(\boldsymbol{AB})=\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\2&4&1&1&5\\-1&-2&-2&1&-4\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-3&3\\0&0&-3&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-3&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&1&2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AB})=2<4=n$，有无穷多解，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2x_2-x_4+2\\x_2=x_2\\x_3=x_4+1\\x_4=x_4\end{cases}$$

x_2，x_4 为自由未知量，令 $x_2=c_1$，$x_4=c_2$，方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=-2c_1-c_2+2\\x_2=c_1\\x_3=c_2+1\\x_4=c_2\end{cases}$$

方程组的一般解还可写成向量形式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad（C_1，C_2\ 为任意常数）$$

练习 8.6

1．求下列齐次线性方程组的解．

（1）$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\2x_1-2x_2-3x_3+4x_4=0\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=0\end{cases}$

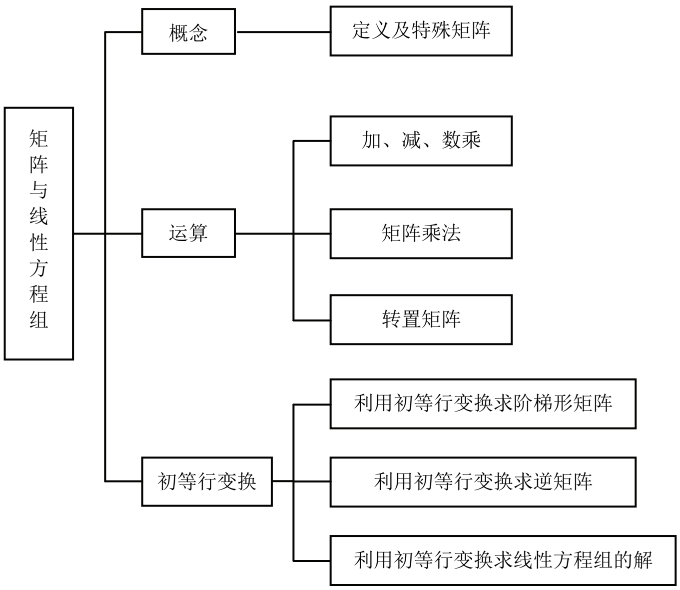
（2）$\begin{cases}3x_1-5x_2+x_3-2x_4=0\\2x_1+3x_2-5x_3+x_4=0\\-x_1+7x_2-4x_3+3x_4=0\\4x_1+15x_2-7x_3+8x_4=0\end{cases}$

2．求下列非齐次线性方程组的解.

（1）$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 22 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 15x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 5 \end{cases}$

3．当 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

本章知识结构图



数学史话 8

拉普拉斯（LaPlace，1749—1827，法国数学家）

拉普拉斯是法国诺曼底地区的农家子弟，达朗贝尔帮助他当上了巴黎军事学校数学教授，后来与拉格朗日（Lagrange）和勒让德（Legendre）并称“巴黎三 L”．1827 年逝世，据说留下的遗言是：“我们知道的，是很微小的；我们不知道的，是无限的．”

拉普拉斯对数学物理的影响是巨大的．通常认为他偏爱应用而对纯粹数学不感兴趣．在拉普拉斯的著作中，确实经常用“容易看出”这样的轻松一笔来代替对所得数学结论的严格证明．这往往使阅读他的著作的人感到头痛，但拉普拉斯有自己的想法．他在另一部著作《概率的解析理论》“绪论”中曾经这样写道：“分析和自然哲学中最重大的发现都应归功于这种丰富多产的方法，也就是所谓的‘归纳’方法．牛顿二项式定理和万有引力原理就是归纳法的成果”．与 18 世纪的其他数学家相比，拉普拉斯更醉心于发现结果而淡出证明，不过无论如何，数学在他心目中有特殊的地位，因为他说过：“一切自然现象都是少数不变定律的数学推论”．

摘自《数学史概论》李文林（第二版）

第 9 章　拉普拉斯变换

在数学中，为了把复杂的计算转化为较简单的计算，往往采用变换的方法，拉普拉斯变换（简称拉氏变换）就是其中一种．拉氏变换在微分方程和积分方程中是经常用到的较简便的一种求解方法，另外在自动控制系统分析以及工程技术的线性系统中，也有着广泛的应用．

本章介绍拉氏变换的基本概念和主要性质、拉式逆变换以及拉式变换的简单应用．

9.1　拉氏变换的概念

9.1.1　拉氏变换的定义

定义 9.1　设函数 $f(t)$ 当 $t\geqslant 0$ 时有定义，且广义积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad (s\text{ 是一个参变量})$$

在 s 的某一个区域内收敛，则由此积分确定了参变量为 s 的函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{9.1}$$

并简记为

$$F(s)=L\left[f(t)\right]$$

我们把 $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的拉氏变换．有时 $F(s)$ 也称为 $f(t)$ 的象函数，$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的象原函数．

在上述定义中需要说明两点：

（1）在拉氏变换中，只要求 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 内有定义，以后为了研究方便，总假定在 $(-\infty,0)$ 内，$f(t)\equiv 0$；

（2）在拉氏变换中，s 是一个参变量，作为 $F(s)$ 的自变量 s 取复数时，s 是复变量，所以 $F(s)$ 是一个复变函数．在后面的讨论中，s 只限取实变量的情况，但对所得到的结论也适用于 s 是复变量的情况．

例 1　求 $f(t)=1$ 的拉氏变换．

解　$$L[1]=\int_0^{+\infty} 1\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}(-st)$$

$$=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}\qquad (s>0)$$

例 2　求 $f(t)=\mathrm{e}^{at}$（a 为常数）的拉氏变换．

解　$$L[\mathrm{e}^{at}]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{-(s-a)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}\left[-(s-a)t\right]=\frac{1}{-(s-a)}\mathrm{e}^{-(s-a)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{-(s-a)}(0-1)=\frac{1}{s-a}\quad (s>a)$$

用定义求一个函数的拉氏变换是较麻烦的，今后借助于查拉氏变换表，可求出函数的拉氏变换.

9.1.2　三个特殊的函数

下面介绍在工程技术中常用的三个特殊的函数以及它们的拉氏变换.

1．指数衰减函数

函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$　（$\beta>0$），称为指数衰减函数，如图 9-1 所示.

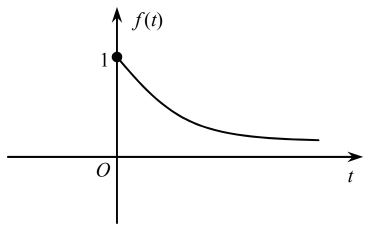


图 9-1

例 3　求指数衰减函数 $f(t)$ 的拉氏变换.

解　在例 2 中 $f(t)=\mathrm{e}^{at}$，令 $a=-\beta$（$\beta>0$），则有

$$L(\mathrm{e}^{-\beta t})=\frac{1}{s+\beta}$$

2．单位阶梯函数

函数 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & t\geqslant 0\end{cases}$ 称为单位阶梯函数，如图 9-2 所示.

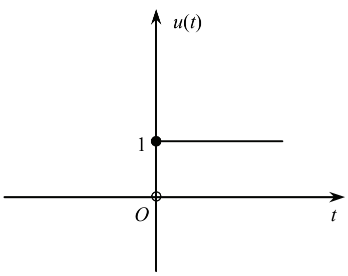


图 9-2

例 4　求单位阶梯函数 $u(t)$ 的拉氏变换.

解　$L[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}(-st)=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=-\frac{1}{s}(0-1)=\frac{1}{s} \qquad (s>0)$$

3．单位脉冲函数

在工程技术中，常会遇到一些脉冲现象，也就是集中到瞬间的一种冲量．例如，机床在冲压某种冲件时，以质量为m，速度为v_0的冲头撞击一固定的钢板，于是在时间$[0，\tau]$（τ是很小的正数）内，根据物理学中的动量定律，这时钢板受到的冲击力近似为

$$F=\frac{mv_0}{\tau}$$

当作用时间越短（即τ的值越小），冲击力就越大，因此钢板受到的冲击力F是时间t的函数，可近似表示为

$$F_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{mv_0}{\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0, & t>\tau\end{cases}$$

当$\tau\to0$时，如果$t\neq0$，则$F_\tau(t)\to0$；如果t=0时，则$F_\tau(t)\to\infty$，即

$$\lim_{\tau\to0}F_\tau(t)=\begin{cases}0, & t\neq0\\ \infty, & t=0\end{cases}$$

显然，像此类瞬间作用的冲量不能用通常意义下的函数描述它，为此需要定义新的函数来描述此类现象．

设

$$\delta_\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中τ为很小的正数，其图像如图 9-3 所示．

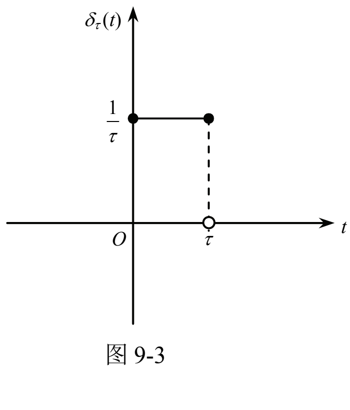


图 9-3

当$\tau\to0$时，$\delta_\tau(t)$的极限，即

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to0}\delta_\tau(t)$$

把$\delta(t)$称为狄拉克函数，简称为δ函数，工程技术中称为单位脉冲函数．

因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{\tau}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t+\int_{\tau}^{+\infty}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\tau}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\tau}\frac{1}{\tau}\mathrm{d}t=1$$

所以规定

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

从物理角度来解释，上述规定的积分说明当 $t=0$ 时刻，出现了宽度无限小，幅度无限大，而面积为 1 的脉冲.

$\delta(t)$ 的图形如图 9-4 所示.

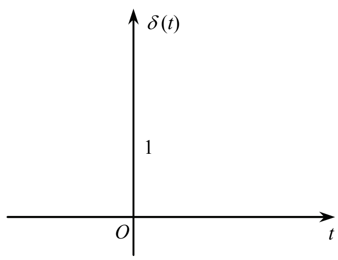


图 9-4

例 5　求单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换.

解　已知 $f(t)$是 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个连续函数，由单位冲函数 $\delta(t)$ 的筛选性质：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)$$

$$L\,[\,\delta(t)\,]=\int_0^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{-st}\big|_{t=0}=1$$

练习 9.1

求下列函数的拉氏变换.

（1）$f(t)=\mathrm{e}^{-2t}$；

（2）$f(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<4;\\ 1, & t\geqslant 4.\end{cases}$

（3）$f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<2;\\ 1, & 2\leqslant t<4;\\ 0, & t\geqslant 4.\end{cases}$

9.2　拉氏变换的性质

下面介绍拉氏变换的几个主要性质，利用这些性质，可以求一些较复杂函数的拉氏变换.

1．线性性质

如果 α、β 是常数，且 $L\,[\,f_1(t)\,]=F_1(s)$，$L\,[\,f_2(t)\,]=F_2(s)$，那么

$$L\,[\,\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\,]=\alpha L\,[\,f_1(t)\,]+\beta L\,[\,f_2(t)\,]$$

$$=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s) \tag{9.2}$$

线性性质说明，函数线性组合的拉氏变换等于各函数拉氏变换的线性组合.

线性性质还可推广到有限多个函数的线性组合的情况.

例 1 求 $f(t)=\frac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-bt})$（$a$、$b$ 为常数）的拉氏变换.

解 由（9.2）式及 9.1 节的例 1、例 2，有

$$\begin{aligned} L\left[\frac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-bt})\right] &= \frac{1}{a}L\,[1-\mathrm{e}^{-bt}] \\ &= \frac{1}{a}\{L\,[1]-L\,[\mathrm{e}^{-bt}]\} \\ &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+b}\right) \\ &= \frac{b}{as(s+b)} \end{aligned}$$

2．微分性质

如果 $L\,[f(t)]=F(s)$，那么

$$L\,[f'(t)]=sF(s)-f(0)$$

$$L\,[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0) \tag{9.3}$$

微分性质说明，一阶导函数 $f'(t)$ 的拉氏变换等于这个函数 $f(t)$ 的拉氏变换乘以参变量 s，再减去这个函数的初值 $f(0)$.

微分性质还可以推广到三阶以至更高阶的情况.

例 2 求 $f_1(t)=t$ 与 $f_2(t)=\cos at$ 的拉氏变换.

解 由于 $f_1(0)=0$，$f_1'(t)=1$，
由（9.3）式的 $L\,[f'(t)]=sF(s)-f(0)$ 及 9.1 节的例 1，有

$$L(1)=L\,[f_1'(t)]=sF(s)-f(0)=sL(t)-0$$

$$\frac{1}{s}=sL\,[t]$$

得

$$L[t]=\frac{1}{s^2}$$

由于 $f_2(0)=1$，$f_2'(0)=0$，$f_2''(t)=-a^2\cos at$，由（9.3）式的 $L\,[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$，有

$$L[-a^2\cos at]=L\,[f_2''(t)]=s^2L\,[f_2(t)]-sf(0)-f'(0)$$

即

$$-a^2L\,[\cos at]=s^2L\,[\cos at]-s$$

移项化简后，得

$$L\,[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2}$$

同理可得出

$$L\,[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2}$$

3．位移性质

如果 $L\left[f(t)\right]=F(s)$，那么

$$L\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right]=F(s-a) \tag{9.4}$$

位移性质说明，象原函数 $f(t)$ 乘 e^{at} 后的拉氏变换等于象函数 $F(s)$ 位移 a 个单位.

例 3　求 $L[t\mathrm{e}^{at}]$ 及 $L[\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t]$.

解　由例 2，有

$$L[t]=\frac{1}{s^2}$$

再由（9.4）式，得

$$L[t\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{(s-a)^2}$$

由例 2，有

$$L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

再由（9.4）式，得

$$L[\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

同理可得出

$$L[\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

4．延迟性质

如果 $L\left[f(t)\right]=F(s)$，那么

$$L\left[f(t-a)\right]=\mathrm{e}^{-as}F(s) \quad (a>0) \tag{9.5}$$

延迟性质说明，象原函数 $f(t)$ 在时间上延迟 a 个单位后的拉氏变换等于象函数 $F(s)$ 乘以 e^{-as}.

例 4　求函数 $u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a;\\ 1, & t\geqslant a\end{cases}$ 的拉氏变换.

解　由 $L\left[u(t)\right]=\dfrac{1}{s}$ 及（9.5）式，得

$$L\left[u(t-a)\right]=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-as}$$

例 5　求如图 9-5 所示的分段函数 $h(t)=\begin{cases}1, & a\leqslant t<b;\\ 0, & 其他\end{cases}$ 的拉氏变换.

解　利用单位阶梯函数，$h(t)$ 表示为

$$h(t)=u(t-a)-u(t-b)$$

$$\begin{aligned}L\left[h(t)\right]&=L\left[u(t-a)-u(t-b)\right]\\&=L\left[u(t-a)\right]-L\left[u(t-b)\right]\\&=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-as}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-bs}=\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-as}-\mathrm{e}^{-bs})\end{aligned}$$

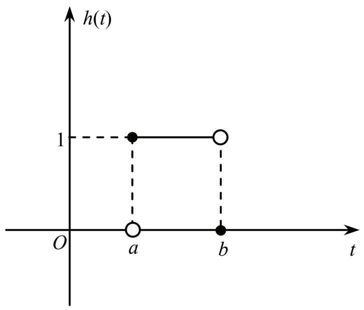


图 9-5

除了上述常用的四个拉氏变换性质外，还有一些性质，为使用时便于查阅，一并列在表 9-1 中.

求一个函数的拉氏变换，如果用定义求有时是很麻烦的，现将常用函数的拉氏变换列成表 9-2，今后求函数的拉氏变换时，可直接查表 9-2，或利用拉氏变换的某些性质、恒等变形等方法化成表 9-2 中已有的形式查出.

表 9-1

序　号	拉氏变换性质（设 $L[f(t)]=F(s)$）
1	$L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha L[f_1(t)]+\beta L[f_2(t)]$
2	$L[e^{at}f(t)]=F(s-a)$
3	$L[f(t-a)]=e^{-as}F(s)$　（$a>0$）
4	$L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$，$L[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
5	$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
6	$L[t^nf(t)]=(-1)^nF^{(n)}(s)$
7	$L[\int_0^t f(x)dx]=\dfrac{F(s)}{s}$
8	$L[\dfrac{f(t)}{t}]=\int_s^{+\infty}F(s)ds$
9	$L[f(at)]=\dfrac{1}{a}F(\dfrac{s}{a})$　（$a>0$）
10	如果 $f(t)$ 是周期函数，即 $f(t+T)=f(t)$ 则 $L[f(t)]=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$

表 9-2

序　号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$（或 1）	$\dfrac{1}{s}$
3	$t^n(n=1,\ 2,\ \cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
4	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
5	$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$

续表

序　号	$f(t)$	$F(s)$
6	$t^n e^{at}(n=1,\ 2,\ \cdots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
8	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
9	$\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$
10	$\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
11	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
12	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
13	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
14	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$
16	$e^{at}-e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
17	$\sin\omega t-\omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
18	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
19	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$

练习 9.2

求下列函数的拉氏变换.

（1） $f(t)=t^2-2t+3$；

（2） $f(t)=1-te^t$；

（3） $f(t)=5\sin 2t+4\cos 3t$；

（4） $f(t)=e^{-2t}\sin 3t$.

9.3　拉氏逆变换

前两节我们介绍了已知象原函数 $f(t)$，求它的象函数 $F(s)$ 的问题，即 $L[f(t)]=F(s)$. 本节介绍相反的问题，已知象函数 $F(s)$，求它的象原函数 $f(t)$，即拉氏变换的逆变换，称为拉氏逆变换，简记为

$$f(t)=L^{-1}[F(s)] \tag{9.6}$$

已知象函数 $F(s)$，求它的象原函数 $f(t)$，常用拉氏变换表 9-2 反查表求出，但有时还要

用到拉氏变换的性质，因此下面把常用的拉氏变换的性质用逆变换的形式写出.

设 $L[f_1(t)]=F_1(s)$，$L[f_2(t)]=F_2(s)$，$L[f(t)]=F(s)$

1．线性性质

$$\begin{aligned}L^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]&=\alpha L^{-1}[F_1(s)]+\beta L^{-1}[F_2(s)]\\&=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\quad（\alpha，\beta\text{ 均为常数}）\end{aligned}\tag{9.7}$$

2．位移性质

$$L^{-1}[F(s-a)]=\mathrm{e}^{at}L^{-1}[F(s)]=\mathrm{e}^{at}f(t)\tag{9.8}$$

3．延迟性质

$$L^{-1}[\mathrm{e}^{-as}F(s)]=f(t-a)\cdot u(t-a)\quad（a>0）\tag{9.9}$$

例 1　求下列函数的拉氏逆变换.

（1）$F(s)=\dfrac{1}{s+4}$；　　（2）$F(s)=\dfrac{1}{(s-3)^2}$；

（3）$F(s)=\dfrac{3s-5}{s^2}$；　　（4）$F(s)=\dfrac{5s+3}{s^2+4}$.

解　（1）由表 9-2 中的公式 4，得

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]=\mathrm{e}^{-4t}$$

（2）由表 9-2 中的公式 6，取 $a=3$，$n=1$，得

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right]=t\mathrm{e}^{3t}$$

（3）由（9.7）式及表 9-2 中的公式 1、3，得

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{3s-5}{s^2}\right]=3L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-5L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=3-5t$$

（4）由（9.7）式及表 9-2 中的公式 7、8，得

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{5s+3}{s^2+4}\right]=5L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]+\frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=5\cos 2t+\frac{3}{2}\sin 2t$$

例 2　求 $F(s)=\dfrac{2s+3}{s^2-2s+5}$ 的拉氏逆变换.

解　$$\begin{aligned}f(t)&=L^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-2s+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{2(s-1)+5}{(s-1)^2+2^2}\right]\\&=2L^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right]+\frac{5}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right]\\&=2\mathrm{e}^t\cos 2t+\frac{5}{2}\mathrm{e}^t\sin 2t\\&=(2\cos 2t+\frac{5}{2}\sin 2t)\mathrm{e}^t\end{aligned}$$

在例 2 中，为了求出 $F(s)$ 的拉氏逆变换，首先把 $F(s)$ 恒等变形，化成表 9-2 中已有的形式反查表，最后求出 $f(t)$. 而在用拉氏变换解决工程技术中的应用问题时，经常遇到的象函

数 $F(s)$ 是有理分式，一般可将 $F(s)$ 分解为部分分式之和，然后再利用拉氏变换表 9-2，反查表求出象原函数 $f(t)$.

例 3　求 $F(s)=\dfrac{s+9}{s^2+5s+6}$ 的拉氏逆变换.

解　先将 $F(s)$ 分解成部分分式之和

$$\frac{s+9}{s^2+5s+6}=\frac{s+9}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}$$

用待定系数法求得 $A=7$， $B=-6$，因此

$$\frac{s+9}{s^2+5s+6}=\frac{7}{s+2}-\frac{6}{s+3}$$

于是

$$\begin{aligned}f(t)&=L^{-1}\left[\frac{s+9}{s^2+5s+6}\right]=L^{-1}\left[\frac{7}{s+2}-\frac{6}{s+3}\right]\\&=7L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]-6L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]\\&=7\mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-3t}\end{aligned}$$

例 4　求 $F(s)=\dfrac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+s}$ 的拉氏逆变换.

解　先将 $F(s)$ 分解成部分分式之和

$$\frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+s}=\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}$$

用待定系数法求得 $A=-1$， $B=2$， $C=2$，因此

$$\frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+s}=\frac{-1}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}$$

于是

$$\begin{aligned}f(t)&=L^{-1}\left[\frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+s}\right]=L^{-1}\left[\frac{-1}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}\right]\\&=-L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+2L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+2L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]\\&=-1+2\mathrm{e}^{t}+2t\mathrm{e}^{t}=2(t+1)\mathrm{e}^{t}-1\end{aligned}$$

例 5　求 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s+2)(s^2+2s+2)}$ 的拉氏逆变换.

解　先将 $F(s)$ 分解成部分分式之和

$$\frac{s^2}{(s+2)(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

用待定系数法求得 $A=2$， $B=-1$， $C=-2$，因此

$$\frac{s^2}{(s+2)(s^2+2s+2)}=\frac{2}{s+2}-\frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

$$=\frac{2}{s+2}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

于是

$$\begin{aligned}f(t)&=L^{-1}\left[\frac{s^2}{(s+2)(s^2+2s+2)}\right]\\&=L^{-1}\left[\frac{2}{s+2}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]\\&=2L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]-L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]\\&=2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t\\&=2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}(\cos t+\sin t)\end{aligned}$$

练习 9.3

求下列函数的拉氏逆变换.

（1）$F(s)=\dfrac{2}{s-3}$；（2）$F(s)=\dfrac{4s}{s^2+16}$；

（3）$F(s)=\dfrac{1}{4s^2+9}$；（4）$F(s)=\dfrac{2s-8}{s^2+36}$；

（5）$F(s)=\dfrac{s}{(s+3)(s+5)}$；（6）$F(s)=\dfrac{4}{s^2+4s+10}$.

9.4 拉氏变换的应用

在力学、电路理论、自动控制理论中，往往需要对一个线性系统进行分析与研究，在很多情况下，建立描述该系统特性的数学表达式是一个线性微分方程或线性微分方程组或线性微积分方程．下面举例说明拉氏变换在这方面的应用.

例 1 求微分方程 $x'(t)+5x(t)=0$ 满足初始条件 $x(0)=2$ 的解.

解 设 $L[x(t)]=X(s)$，对方程两边取拉氏变换，得

$$L[x'(t)+5x(t)]=L[0]$$
$$L[x'(t)]+5L[x(t)]=0$$
$$sX(s)-x(0)+5X(s)=0$$
$$sX(s)-2+5X(s)=0$$

解出 $X(s)$，得 $X(s)=\dfrac{2}{s+5}$.

这样，微分方程经拉氏变换后，得到一个关于解 $x(t)$ 的象函数 $X(s)$ 的代数方程.

对 $X(s)$ 求拉氏逆变换，得

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}\left[\frac{2}{s+5}\right]=2\mathrm{e}^{-5t}$$

这就是所给微分方程满足初始条件的特解.

由例 1 可看出，用拉氏变换解线性微分方程的运算过程可用如图 9-6 所示的框图来表示．

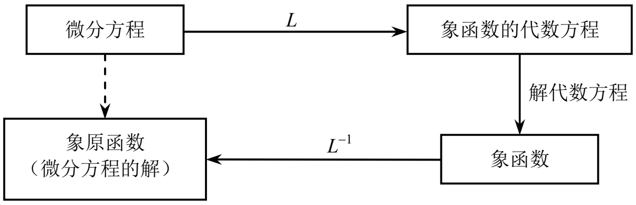


图 9-6

例 2　列车在平直线路上以 20m/s（相当于 72km/h）的速度行驶，当制动时列车获得加速度–0.4m/s^2．求制动阶段列车的运动规律，并求开始制动后多少时间列车才能停住，列车在这段时间里行驶了多少路程？

解　设列车在开始制动后 t 秒时行驶了 s 米，由题意，反映制动阶段列车运动规律的函数 $x = x(t)$ 应满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -0.4 \tag{9.10}$$

此外，$x = x(t)$ 还应满足下列条件：

当 $t = 0$ 时，$x = 0$，$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 20$

又设 L ［$x(t)$］$= X(s)$，对（9.10）式两端取拉氏变换，得

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) = -0.4\frac{1}{s}$$

$$s^2 X(s) - 20 = -0.4\frac{1}{s}$$

所以

$$X(s) = \frac{20}{s^2} - \frac{0.4}{s^3}$$

对 $X(s)$ 再求拉氏逆变换，得

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{20}{s^2} - \frac{0.4}{s^3}\right] = 20L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - 0.2L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right]$$

$$= 20t - 0.2t^2 \tag{9.11}$$

对（9.11）式求导数，有

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 20 - 0.4t \tag{9.12}$$

在（9.12）式中，令 $v(t) = 0$，得到列车从开始制动到完全停住所需要的时间

$$t = \frac{20}{0.4} = 50 \text{（s）}$$

再把 $t = 50$，代入（9.11）式，得到列车在制动阶段行驶的路程

$$x = 20 \times 50 - 0.2 \times 50^2 = 500 \text{（m）}$$

例 3　质量为 m 的物体挂在弹簧系数为 k 的弹簧一端，如图 9-7 所示．在不考虑介质阻

力的情况下，当 $t=0$ 时受到冲击力 $A\delta(t)$ 后，物体由静止平衡位置 $x=0$ 处开始运动，求该物体的运动规律 $x(t)$.

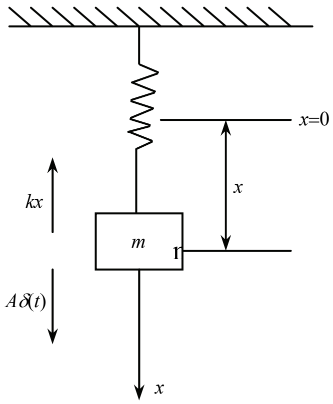


图 9-7

解 由牛顿第二定律和虎克定律，得出物体运动的微分方程为

$$mx''=A\delta(t)-kx$$

令 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$，化简后有

$$x''+\omega^2x=\frac{A\delta(t)}{m}$$

$$x(0)=x'(0)=0$$

这是二阶常系数线性非齐次微分方程.

设 $L\,[\,x(t)\,]=X(s)$，对方程两边取拉氏变换，得

$$s^2X(s)+\omega^2X(s)=\frac{A}{m}$$

所以

$$X(s)=\frac{A}{m}\frac{1}{s^2+\omega^2}$$

对 $X(s)$ 再求拉氏逆变换，得

$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{A}{m}\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]=\frac{A}{m\omega}L^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$=\frac{A}{m\omega}\sin\omega t$$

由此可看出，在冲击力的作用下，物体做正弦振动的振幅为 $\dfrac{A}{m\omega}$，角频率为 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$（称为该系统的自然频率或称固有频率）.

例 4 在 RLC 电路中串联直流电源 E，如图 9-8 所示，求回路中的瞬时电流 $i(t)$.

解 由电路中的基尔霍夫定律，得

$$u_{\rm L}+u_{\rm R}+u_{\rm C}=E$$

其中 $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$， $u_R = Ri(t)$， $u_C = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t$，代入上式，得

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t = E$$

并且
$$i(0) = 0$$

这是一个微积分方程.

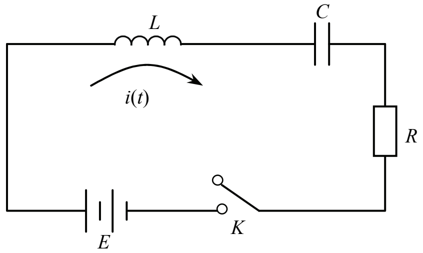


图 9-8

设 $L[\,i(t)\,] = I(s)$，对方程两边取拉氏变换（积分的拉氏变换，利用表 9-1 中的公式 7），得

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = \frac{E}{s}$$

所以

$$I(s) = \frac{E}{L\left[s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}\right]} = \frac{E}{L[(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)]}$$

其中 r_1、r_2 表示方程 $s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC} = 0$ 的根.

对 $I(s)$ 再求拉氏逆变换，得

$$i(t) = \frac{E}{L}\cdot\frac{\mathrm{e}^{r_1 t} - \mathrm{e}^{r_2 t}}{r_1 - r_2}$$

例 5　求微分方程组

$$\begin{cases} x'' - 2y' - x = 0 \\ x' - y = 0 \end{cases}$$

满足初始条件 $x(0) = 0$， $x'(0) = 1$， $y(0) = 1$ 的解.

解　设 $L[\,x(t)\,] = X(s)$，$L[\,y(t)\,] = Y(s)$，对方程组的两个方程两边分别取拉氏变换，得

$$\begin{cases} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - 2\,[sY(s) - y(0)] - X(s) = 0 \\ sX(s) - x(0) - Y(s) = 0 \end{cases}$$

代入初始条件 $x(0) = 0$， $x'(0) = 1$， $y(0) = 1$，并整理后，有

$$\begin{cases} (s^2 - 1)X(s) - 2sY(s) + 1 = 0 \\ sX(s) - Y(s) = 0 \end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{s^2+1} \\ Y(s)=\dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

对上式 $X(s)$ 、$Y(s)$ 分别再求拉氏逆变换，得原方程组的解：

$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\sin t$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\cos t$$

例 6 如图 9-9 所示的电路中，设输入瞬时电压为

$$u_0(t)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant t<T; \\ 0, & t\geqslant T. \end{cases}$$

求瞬时输出电压 $u_{\mathrm{R}}(t)$（电容 C 在 $t=0$ 时不带电）.

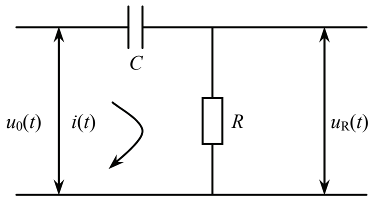


图 9-9

解 设电路中的瞬时电流为 $i(t)$，由图可列出关于 $i(t)$ 的方程组为

$$\begin{cases} R\cdot i(t)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\mathrm{d}t=u_0(t) \\ u_{\mathrm{R}}(t)=R\cdot i(t) \end{cases}$$

这是微积分方程组.

设 $L[i(t)]=I(s)$，$L[u_{\mathrm{R}}(t)]=U_{\mathrm{R}}(s)$.

因为 $u_0(t)=u(t)-u(t-\tau)$，所以，$L[u_0(t)]=L[u(t)]-L[u(t-T)]$

$$=\frac{1}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-Ts}}{s}=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-Ts})$$

对上述微积分方程组两边分别取拉氏变换，得

$$\begin{cases} RI(s)+\dfrac{1}{Cs}I(s)=\dfrac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-Ts}) \\ U_{\mathrm{R}}(s)=RI(s) \end{cases}$$

整理后，得

$$\begin{cases} I(s)=\dfrac{C(1-\mathrm{e}^{-Ts})}{RCs+1}=\dfrac{C}{RCs+1}-\dfrac{C\mathrm{e}^{-Ts}}{RCs+1} \\ U_{\mathrm{R}}(s)=RI(s) \end{cases}$$

对上式 $I(s)$ 、$U_{\mathrm{R}}(s)$ 分别再求拉氏逆变换，得原方程组的解：

$$i(t)=L^{-1}\left[\frac{C}{RCs+1}-\frac{C\mathrm{e}^{-Ts}}{RCs+1}\right]=L^{-1}\left[\frac{C}{RCs+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{C\mathrm{e}^{-Ts}}{RCs+1}\right]$$

$$=\frac{1}{R}L^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]-\frac{1}{R}L^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-Ts}}{s+\frac{1}{RC}}\right]$$

$$=\frac{1}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}-\frac{1}{R}\mathrm{e}^{-\frac{(t-T)}{RC}}$$

$$u_{\mathrm{R}}(t)=L^{-1}\left[RI(s)\right]=RL^{-1}\left[I(s)\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}-\mathrm{e}^{-\frac{(t-T)}{RC}}$$

练习 9.4

1．用拉氏变换求下列微分方程满足初值条件的解.

（1）$\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+5i(t)=10\mathrm{e}^{-3t}$，$i(0)=0$；

（2）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=\omega$；

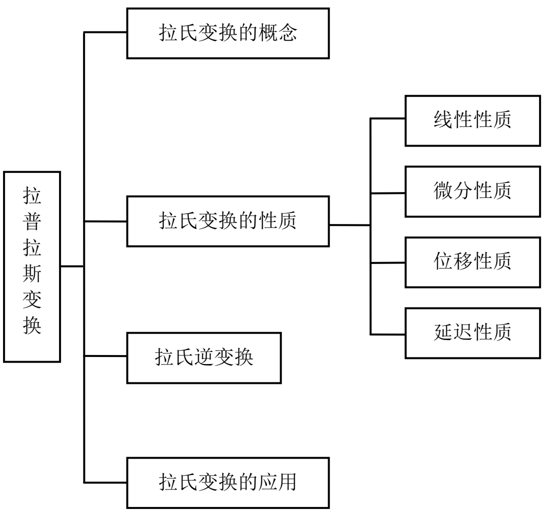
（3）$x''(t)+2x'(t)+5x(t)=0$，$x(0)=1$，$x'(0)=5$.

2．用拉氏变换求下列微分方程组满足初始条件的解.

（1）$\begin{cases}x'+x-y=\mathrm{e}^t\\ y'+3x-2y=2\mathrm{e}^t\end{cases}$　$x(0)=y(0)=1$；

（2）$\begin{cases}x''+2y=0\\ y'+x+y=0\end{cases}$　$x(0)=0$，$x'(0)=y'(0)=1$.

本章知识结构图



附录A 积 分 表

（一）含有 $a+bx$ 的积分

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C$

2. $\int (a+bx)^n \mathrm{d}x = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C$ （$n \neq -1$）

3. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{1}{b^2}\left[a+bx - a\ln|a+bx|\right] + C$

4. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\right] + C$

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

7. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\ln|a+bx| + \frac{a}{a+bx}\right] + C$

8. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx - 2a\ln|a+bx| - \frac{a^2}{a+bx}\right] + C$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

（二）含有 $\sqrt{a+bx}$ 的积分

10. $\int \sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$

11. $\int x\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x = -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$

12. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x = \frac{2(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^3} + C$

13. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C$

14. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2 - 4abx + 3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx} + C$

15. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\left|\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}\right|}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C & (a>0)\\ \frac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C & (a<0)\end{cases}$

16. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

17. $\int\frac{\sqrt{a+bx}dx}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

（三）含有 $a^2\pm x^2$ 的积分

18. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

19. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

20. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

21. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

（四）含有 $a\pm bx^2(b>0)$ 的积分

22. $\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}x+C$　（$a>0,\ b>0$）

23. $\int\frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}x}\right|+C$　（$a>0,\ b>0$）

24. $\int\frac{xdx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\ln\left|a+bx^2\right|+C$

25. $\int\frac{x^2dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}$

26. $\int\frac{dx}{x(a+bx^2)}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x^2}{a+bx^2}\right|+C$

27. $\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2}$

28. $\int\frac{dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}$

（五）含有 $\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$ 的积分

29. $\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

30. $\int\sqrt{(x^2+a^2)^3}dx=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

31. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3}+C$

32. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

33. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

34. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$

35. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}+C$

36. $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

37. $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

38. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C$

39. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$

40. $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x}{x}=\sqrt{x^2+a^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{|x|}+C$

41. $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

（六）含有 $\sqrt{x^2-a^2}(a>0)$ 的积分

42. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

43. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$

44. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}+C$

45. $\int\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

46. $\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

47. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3}+C$

48. $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5}+C$

49. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

50. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

51. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

52. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C$

53. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

54. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$

55. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

（七）含有$\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$的积分

56. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

57. $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

58. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C$

59. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

60. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

61. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

62. $\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

63. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}+C$

64. $\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5}+C$

65. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

66. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

67. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right|+C$

68. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

69. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$

70. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

（八）含有 $a+bx\pm cx^2(c>0)$ 的积分

71. $\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx-cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}\right|+C$

72. $\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx+cx^2}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C & (b^2<4ac)\\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C & (b^2>4ac)\end{cases}$

（九）含有 $\sqrt{a+bx\pm cx^2}\,(c>0)$ 的积分

73. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{c}\ln\left|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right|+C$

74. $\int\sqrt{a+bx+cx^2}\mathrm{d}x=\frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}-\frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}}\ln\left|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right|+C$

75. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\ln\left|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right|+C$

76. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

77. $\int\sqrt{a+bx-cx^2}\mathrm{d}x=\frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

78. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=-\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}+\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

（十）含有 $\sqrt{\frac{a\pm x}{b\pm x}}$ 或含有 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分

79. $\int\sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\mathrm{d}x=\sqrt{(a+x)(b+x)}+(a-b)\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x})+C$

80. $\int\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\mathrm{d}x=\sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}+C$

81. $\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\mathrm{d}x=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+C$

82. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$

（十一）含有三角函数的积分

83. $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

84. $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

85. $\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$

86. $\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

87. $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C=\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right|+C$

88. $\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

89. $\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$

90. $\int\csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

91. $\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

92. $\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

93. $\int\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

94. $\int\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

95. $\int\sin^n x\mathrm{d}x=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$

96. $\int\cos^n x\mathrm{d}x=\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\mathrm{d}x$

97. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}x}$

98. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2}x}$

99. $\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}\int\cos^{m-2}x\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\cos^m x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$\left.\begin{array}{l} 100.\ \int \sin mx\cos nx\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C \\ 101.\ \int \sin mx\sin nx\mathrm{d}x = -\dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \\ 102.\ \int \cos mx\cos nx\mathrm{d}x = \dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \end{array}\right\} \quad (m \neq n)$$

103. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2 > b^2)$

104. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

105. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \quad (a^2 > b^2)$

106. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

107. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b\tan x}{a}\right) + C$

108. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x+a}{b\tan x-a}\right| + C$

109. $\int x\sin ax\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C$

110. $\int x^2\sin ax\mathrm{d}x = \frac{-1}{a}x^2\cos ax + \frac{2}{a^2}x\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax + C$

111. $\int x\cos ax\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C$

112. $\int x^2\cos ax\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + C$

（十二）含有反三角函数的积分

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

116. $\int \arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a}-\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}+C$

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$

119. $\int \arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2+a^2)\arctan\frac{x}{2}-\frac{ax}{2}+C$

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a}-\frac{ax^2}{6}+\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)+C$

（十三）含有指数函数的积分

122. $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$

123. $\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a}+C$

124. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$

125. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C$

126. $\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax-1)+C$

127. $\int x^n\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{x^n\mathrm{e}^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$

128. $\int xa^{mx}\mathrm{d}x=\frac{xa^{mx}}{m\ln a}-\frac{a^{mx}}{(m\ln a)^2}+C$

129. $\int x^na^{mx}\mathrm{d}x=\frac{a^{mx}x^n}{m\ln a}-\frac{n}{m\ln a}\int x^{n-1}a^{mx}\mathrm{d}x$

130. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin^n bx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}\sin^{n-1}bx}{a^2+b^2n^2}(a\sin bx-nb\cos bx)+\frac{n(n-1)}{a^2+b^2n^2}b^2\int \mathrm{e}^{ax}\sin^{n-2}bx\mathrm{d}x$

131. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos^n bx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}\cos^{n-1}bx}{a^2+b^2n^2}(a\cos bx+nb\sin bx)+\frac{n(n-1)}{a^2+b^2n^2}b^2\int \mathrm{e}^{ax}\cos^{n-2}bx\mathrm{d}x$

（十四）含有对数函数的积分

132. $\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$

133. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln|\ln x|+C$

134. $\int x^n\ln x\mathrm{d}x=x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]+C$

135. $\int \ln^n x\mathrm{d}x=x\ln^n x-n\int \ln^{n-1}x\mathrm{d}x$

136. $\int x^m \ln^n x\mathrm{d}x = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \dfrac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x\mathrm{d}x$

（十五）定积分

137. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = 0$

138. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\mathrm{d}x = 0$

139. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0，& m \neq n; \\ \pi，& m = n. \end{cases}$

140. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0，& m \neq n; \\ \pi，& m = n. \end{cases}$

141. $\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0，& m \neq n; \\ \dfrac{\pi}{2}，& m = n. \end{cases}$

142. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x,\ I_0 = \dfrac{\pi}{2}，\ I_1 = 1，\ I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$，

$$\begin{cases} I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3}（n\ \text{为大于 1 的奇数}） \\ I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}（n\ \text{为正偶数}） \end{cases}$$

附录 B　初等数学中常用的公式与方法

学习《大学数学》是以初等数学作为基础的，但所用到的初等数学知识并不是全部，而是其中的一部分，在这部分初等数学知识中，有一些是必须熟练掌握的.

为了便于学习《大学数学》，我们把必须熟练掌握的这部分初等数学知识中常用的公式与方法汇集如下.

一、幂函数与指数函数

数学表达式a^b称为幂，其中 a 称为底，b 称为指数．若底为变量 x 而指数为常数 a，则称函数 $y=x^a$ 为幂函数；若底为常数 a 而指数为变量 x，则称函数 $y=a^x$ 为指数函数.

1．幂的各种表达式的定义

（1）$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ \cdots\ \cdot a}_{n\text{个}}$；　$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$　（$a\neq 0$）

（2）$a^0=1$　（$a\neq 0$）

（3）$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　（$a\geqslant 0$）；　$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　（$a>0$）

式中 n、m 均为正整数，a 为有理数.

2．幂的运算法则

（1）$a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$

（2）$\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}$

（3）$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$

（4）$(ab)^x=a^xb^x$

（5）$(\dfrac{a}{b})^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

式中 $a>0$，$b>0$；x_1、x_2、x 均为任意实数.

二、对数函数

若 $a^y=x$　（$a>0,\ a\neq 1$），则将 y 表示为$\log a^x$，　$y=\log_a{}^x$ 称为对数函数，其中 a 称为

底，x 称为真数，y 称为对数.

当 a=10 时，$\log_{10}{}^{x}$ 记做 $\lg x$，称为常用对数.

当 a=e 时，$\log_{e}{}^{x}$ 记做 $\ln x$，称为自然对数.

指数函数 $x=a^y$ 与对数函数 $y=\log_a{}^x$ 互为反函数，是表示 a，x，y 三者同一关系的不同表示方法.

1．性质

（1）$\log_a a^x = x$　　（2）$a^{\log_a x}=x$　　（3）$\log_a 1 = 0$　　（4）$\log_a a = 1$

2．运算法则

（1）$\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$

（2）$\log_a \dfrac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$

（3）$\log_a x^b = b\log_a x$

3．换底公式

$$\log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}$$

三、三角函数

在《大学数学》（理工类）中，一律以“弧度”作为度量角的单位，“弧度”二字经常省略不写.

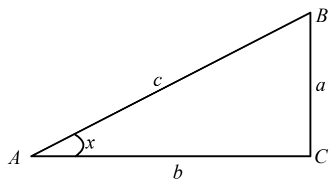
弧度与度的换算关系为：π 弧度=180°，

因此可得出：

0 弧度=0°　　$\dfrac{\pi}{6}$ 弧度=30°　　$\dfrac{\pi}{4}$ 弧度=45°　　$\dfrac{\pi}{3}$ 弧度=60°　　$\dfrac{\pi}{2}$ 弧度=90°

1 弧度≈$57^{\circ}17'$　　$1^{\circ}\approx 0.0175$ 弧度

在三角函数中，特别当角 x 为锐角时，其三角函数可用直角三角形有关两条边的比值表示.



$$\sin x=\frac{对边}{斜边}=\frac{a}{c}\qquad \cos x=\frac{邻边}{斜边}=\frac{b}{c}$$

$$\tan x=\frac{对边}{邻边}=\frac{a}{b}\qquad \cot x=\frac{邻边}{对边}=\frac{b}{a}$$

$$\sec x=\frac{斜边}{邻边}=\frac{c}{b}\qquad \csc x=\frac{斜边}{对边}=\frac{c}{a}$$

1．同角三角函数的基本关系式

（1）$\sin x=\dfrac{1}{\csc x}$　　（2）$\cos x=\dfrac{1}{\sec x}$

（3）$\tan x=\dfrac{1}{\cot x}$　　（4）$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

（5）$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$　　（6）$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

（7）$\tan^2 x+1=\sec^2 x$　　（8）$\cot^2 x+1=\csc x^2$

2．异角三角函数的关系式

（1）$\sin(-x)=-\sin x$　　（2）$\cos(-x)=-\cos x$

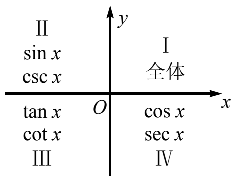
（3）$\tan(-x)=-\tan x$　　（4）$\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)=\cos x$

（5）$\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)=\sin x$　　（6）$\tan(\dfrac{\pi}{2}-x)=\cot x$

（7）$\sin(\pi-x)=\sin x$　　（8）$\cos(\pi-x)=-\cos x$

（9）$\tan(\pi-x)=-\tan x$

3．三角函数的正值象限



4．特殊的正弦、余弦和正切函数值

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0

5．三角函数的和差化积

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

四、排列与组合

1．阶乘

$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$（$n$ 为自然数）

规定：$0!=1$．

2．排列

（1）选排列：$\mathrm{A}_n^k=n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

（2）全排列：$\mathrm{P}^n=\mathrm{A}_n^n=n(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$

3．组合

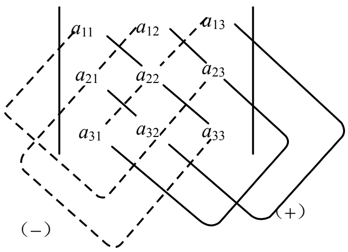
$\mathrm{C}_n^k=\dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$，$\mathrm{C}_n^k$ 也记做$\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$．

规定：$\mathrm{C}_n^0=1$．

4．组合公式

（1）$\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}$　　（2）$\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n}{k}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$　　（3）$\mathrm{C}_{n+1}^k=\mathrm{C}_n^k+\mathrm{C}_n^{k-1}$

五、三阶行列式的计算（对角线法）



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

六、其他

1．完全平方与立方公式

$$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

2．因式分解

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$
$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

3．一元二次方程

$$(x-x_1)(x-x_2)=0 \text{ 的根为 } x=x_1,\ x=x_2$$

4．一元二次不等式

$(x-x_1)(x-x_2)\geqslant0$　（$x_1<x_2$）的解为 $x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2$

$(x-x_1)(x-x_2)\leqslant0$　（$x_1<x_2$）的解为 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$

5．等比数列前 n 项的和

等比数列 a， aq， aq^2， …， aq^{n-1}， …（公比 $q \neq 1$）的前 n 项的和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

6．反三角函数的基本关系式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

七、复数

（一）复数的基本概念

1．复数

对于任何实数 x、y，我们把 $Z=x+y\mathrm{j}$（其中 $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$，称为虚数单位）称为复数．x 称为复数 Z 的实部，y 称为复数 Z 的虚部，分别记为

$$x = R_e(Z)，\quad y = I_m(Z)$$

2．复数的相等

设 $Z_1 = x_1 + y_1\mathrm{j}$， $Z_2 = x_2 + y_2\mathrm{j}$，如果 $x_1 = x_2$， $y_1 = y_2$，则 $Z_1 = Z_2$．

3．共轭复数

设 $Z = x + y\mathrm{j}$，则 Z 的共轭复数 $\overline{Z} = x - y\mathrm{j}$．

（二）复数的五种表示及其相互关系

1．代数形式（或称点表示形式）

$$Z = x + y\mathrm{j}$$

2．向量形式

$\overrightarrow{OZ}$（表示由原点 O 到终点 Z（x，y）的向量）.

3．三角形式

$$Z = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$

4．指数形式

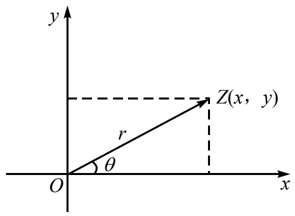
$$Z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

5．极坐标形式

$$Z = r\angle\theta$$

复数的各种表示形式可以相互转化，以适应各种不同问题的需要．

各种表示形式之间的相互关系．



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

其中 r 称为复数 Z 的模（或绝对值）；θ 称为复数 Z 的辐角.

（三）复数的运算

1．复数代数形式的四则运算

设 $Z_1 = x_1 + y_1\mathrm{j}$，$Z_2 = x_2 + y_2\mathrm{j}$.

（1）加减法

$$Z_1 \pm Z_2 = (x_1 + y_1\mathrm{j}) \pm (x_2 + y_2\mathrm{j}) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)\mathrm{j}$$

两个复数加减，按照多项式的加减运算法则进行，即复数的实部与实部相加减，虚部与虚部相加减.

（2）乘法

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + y_1\mathrm{j}) \cdot (x_2 + y_2\mathrm{j}) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_2y_1 + x_1y_2)\mathrm{j}$$

两个复数相乘，按照多项式的乘法运算法则进行，在所得的结果中把 j^2 换成-1，并分别合并实部与虚部.

（3）除法

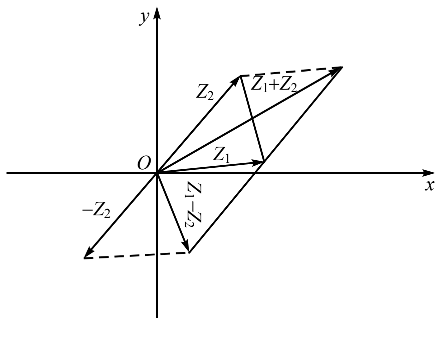
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + y_1\mathrm{j}}{x_2 + y_2\mathrm{j}} = \frac{(x_1 + y_1\mathrm{j})(x_2 - y_2\mathrm{j})}{(x_2 + y_2\mathrm{j})(x_2 - y_2\mathrm{j})} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)\mathrm{j}}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\mathrm{j}$$

两个复数相除（除数不为零），先把它们写成分式，用分母的共轭复数乘分子和分母，然后进行简化，最后写成复数的代数形式.

2．复数向量形式的加减运算

如果用向量表示复数，那么复数 $Z_1 = x_1 + y_1\mathrm{j}$，$Z_2 = x_2 + y_2\mathrm{j}$ 相加或相减，就相当于向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 相加或相减，即可用平行四边形法则或三角形法则求 $Z_1 + Z_2$，$Z_1 - Z_2$.



3．复数三角形式、指数形式、极坐标形式的乘除运算

设

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sin\theta_1) = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1} = r_1\underline{/\theta_1}$$

$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{j}\sin\theta_2) = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} = r_2\underline{/\theta_2}$$

（1）乘法

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{j}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{j}\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} = r_1 r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1\underline{/\theta_1} \cdot r_2\underline{/\theta_2} = r_1 r_2\underline{/(\theta_1+\theta_2)}$$

两个复数相乘，乘积的模等于它们模的乘积，乘积的辐角等于它们辐角的和.

（2）除法

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{j}\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{j}\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1\underline{/\theta_1}}{r_2\underline{/\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\underline{/(\theta_1-\theta_2)}$$

两个复数相除（除数不为零），商的模等于它们模的商，商的辐角等于被除数的辐角与除数的辐角的差.

附录C　练习题参考答案

第1章

练习1.1

1.（1）$(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$　（2）$[-2, 0) \cup (0, 1)$　（3）$[0, \pi)$

2.（1）不是同一函数　（2）不是同一函数　（3）不是同一函数　（4）是同一函数

3.（1）$\sqrt{7}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3+x_0^2}$，$\dfrac{1}{|a|}\sqrt{3a^2+1}$　（2）0，1，2

4.（1）偶函数　（2）奇函数

5.（1）4π（2）π（3）π（4）π

6.（1）$y=\dfrac{1}{2}x+2$　$x\in(-\infty, +\infty)$（2）$y=\sqrt{x}$　$x\in[0, +\infty)$

（3）$y=\log_2 x$　$x\in(0, +\infty)$

7.（1）$y=\mathrm{e}^u$，$u=1-x^2$　（2）$y=\ln u$，$u=3-x$　（3）$y=5u^2$，$u=x+2$

（4）$y=u^3$，$u=\sin v$，$v=8x+5$

8．设底面边长为x，侧面单位面积造价为a，总造价为y，$y=3ax^2+a\cdot\dfrac{4V}{x}$（$0<x<+\infty$）

9．$y=\begin{cases}0.3x, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.45x-7.5, & x>50\end{cases}$

练习1.2

1.（1）1　（2）2　（3）不存在　（4）3

2.（1）c　（2）∞　（3）1　（4）0　（5）$-\infty$　（6）1

3．2（图形略）

4．2，2，2e，4，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在

5.（1）无穷大　（2）无穷小　（3）既不是无穷大也不是无穷小　（4）无穷小

6．当$x\to 1$时，$f(x)$为无穷大；当$x\to -1$时，$f(x)$为无穷小

练习1.3

1.（1）$\dfrac{1}{2}$　（2）24　（3）0　（4）27

2.（1）$\frac{5}{2}$　（2）$\frac{a}{b}$　（3）e^3　（4）e^2

3.（1）4　（2）$\frac{1}{3}$　（3）$-\frac{1}{2}$

练习 1.4

1.（1）$\frac{e^{-2}+1}{-2}$　（2）1　（3）$\frac{1}{2}\ln 2$　（4）1

2．在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续；在 $x=1$ 处不连续；在 $x=2$ 处连续

3．在 $x=2$ 处不连续

4．$a=0$

第 2 章

练习 2.1

1.（1）3　（2）$-\frac{1}{x^2}$

2.（1）$y'=4x^3$　（2）$y'=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$　（3）$y'=-\frac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}}$

3.（1）$A=-f'(x_0)$（2）$A=-f'(x_0)$

4．$v=12\ \text{m/s}$

5．切线：$12x-y-16=0$；法线：$12y+x-98=0$

练习 2.2

1.（1）$y'=6x+\frac{4}{x^3}$　（2）$y'=4x+\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

（3）$y'=3x^2-\sin x$　（4）$y'=\frac{\sin x-x\ln x\cos x}{x\sin^2 x}$

2.（1）$y'\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-2$　（2）$f'(4)=-\frac{1}{18}$

3.（1）$y'=8(2x+5)^3$　（2）$y'=3\sin(4-3x)$

（3）$y'=\frac{1}{x-1}$　（4）$y'=\frac{2+2\ln x}{x}$

4.（1）$y'=e^{x+3}$　（2）$y'=-e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\cos 3x}{2}+3\sin 3x\right)$

（3）$y'=4x\ln 2\cdot 2^{2x^2-1}$

练习 2.3

1.（1）$y'=1-\frac{y}{x}$　（2）$y'=-\frac{e^y}{2y+xe^y}$

（3）$y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$　（4）$y'=x\sec\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$

2.（1）$y'=x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$　（2）$y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right]$

3.（1）$y''=6x\ln x+5x$　（2）$y'''=3e^x+xe^x$

（3）$y''=(3\ln 2)^2 2^{3x}$　（4）$y''=4-\frac{1}{x^2}$

4．$3x+y-4=0$

练习 2.4

1.（1）3　（2）$a\cos at$　（3）$-\frac{1}{(1+x)^2}$

（4）$\frac{1}{1+x}$　（5）e^{x^2}　（6）$-2e^{-2x}$

2.（1）$dy=(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$　（2）$dy=-e^{\cot x}\cdot\csc^2 x dx$

（3）$dy=\frac{-5x}{\sqrt{2-5x^2}}dx$　（4）$dy=\frac{-3x^2}{2(1-x^3)}dx$

3.（1）$\frac{dy}{dx}=\frac{\ln t+1}{2t}$　（2）$\frac{dy}{dx}=-2t$

4.（1）0.998　（2）1.02

练习 2.5

（1）2　（2）1　（3）∞　（4）$-\frac{3}{5}$　（5）$\frac{1}{2}$　（6）0

练习 2.6

1.（1）单调减区间$(-\infty，+\infty)$　（2）单调增区间$(-\infty，+\infty)$

（3）单调减区间（–1，0），单调增区间（0，$+\infty$）

（4）单调减区间（–2，–1），单调增区间$(-\infty，-2)$、（–1，$+\infty$）

2.（1）极大值$f(\frac{1}{2})=\frac{9}{4}$　（2）极小值$f(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}$

3.（1）极大值$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$　（2）极大值$f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$，极小值$f(\frac{5\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$

练习 2.7

1．（1）最大值 $f(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$，最小值 $f(-3)=-1$ （2）最大值 $f(1)=\frac{1}{2}$

2．长为10m，宽为5m时，面积最大为50m^2

练习 2.8

1．（1）凸区间为（$-\infty$，$+\infty$） （2）凹区间为（0，$+\infty$）

2．（1）凸区间为（$-\infty$，$\frac{5}{3}$），凹区间为（$\frac{5}{3}$，$+\infty$），拐点为（$\frac{5}{3}$，$\frac{20}{27}$）

（2）凸区间为（$-\infty$，2），凹区间为（2，$+\infty$），拐点为（2，$2\mathrm{e}^{-2}$）

3．$a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$

4．略

练习 2.9

1．（1）$\mathrm{d}s=\sqrt{9x^4-6x^2+2}\mathrm{d}x$ （2）$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$ （3）$\mathrm{d}s=\sqrt{2-\sin 2x}\mathrm{d}x$

2．（1）2 （2）0

3．（1）$\frac{\sqrt{2}}{4}$ （2）$2\sqrt{2}$

4．曲率最大的点是（$\frac{\pi}{2}$，1）

第 3 章

练习 3.1

1．（1）$s=\int_1^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ （2）$s=\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x$

2．（1）0 （2）2π

练习 3.2

1．$\ln(1-x^3)$

2．（1）20 （2）$\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-1}$

3．2

练习 3.3

1．（1）$-\frac{1}{2}x^{-2}+C$ （2）$\frac{7}{9}x^{\frac{9}{7}}+C$

（3）$4x^{\frac{1}{4}}+C$ （4）$3x^{\frac{4}{3}}-3\mathrm{e}^x+C$

（5）$2\ln|x|-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x+C$ （6）$-4\cos x-3\sin x+\frac{3^x}{\ln 3}+C$

（7）$\tan x+\sec x+C$ （8）$3\arctan x-4\arcsin x+C$

2．略

3．略

练习 3.4

1．（1）$\frac{1}{2}x^2-2\sqrt{x}+C$ （2）$\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}}+\frac{1}{4}x^4+C$

（3）$x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2+C$ （4）$3x-\frac{3^x}{4^x\ln\frac{3}{4}}+C$

（5）$2\arctan x+\frac{1}{3}x^3+C$ （6）$\tan x+x+C$

2．（1）$-(1-2x)^{\frac{1}{2}}+C$ （2）$-\frac{1}{8}(2x-5)^{-4}+C$

（3）$\frac{1}{2}\ln|3x+1|+C$ （4）$2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C$

（5）$-\frac{1}{3}\cos x^3+C$ （6）$\ln|\sin x|+C$

（7）$\frac{1}{7}(\ln|x-2|-\ln|x+5|)+C$ （8）$\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+C$

3．（1）$2\left[\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})\right]+C$ （2）$\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln(1+\sqrt[4]{x^3})\right]+C$

4．（1）$x(\ln x-1)+C$ （2）$\frac{1}{4}(2x-1)\mathrm{e}^{2x}+C$

（3）$\frac{1}{4}(-2x\cos 2x+\sin x)+C$ （4）$\frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ln(1+x^2)-x^2\right]+C$

（5）$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$ （6）$\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+C$

5．（1）$\frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(2\cos x+\sin x)+C$ （2）$\frac{1}{6}\arctan\frac{3x}{2}+C$

（3）$-\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C$ （4）$\frac{x}{2}\sqrt{3x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+2}\right|+C$

练习 3.5

1．（1）0 （2）$\frac{7}{2}$ （3）1

（4）$1-\frac{\pi}{4}$ （5）$1-\frac{\pi}{4}$

2．（1）$2(\cos 1-\cos 2)$ （2）$\frac{1}{6}$ （3）$\frac{\pi^2}{32}$

（4）$2(2-2\ln 2)$

3.（1）-2　　（2）$\dfrac{\pi-2}{4}$　　（3）$\dfrac{3}{16}e^4+\dfrac{1}{16}$

练习 3.6

（1）收敛　　（2）发散　　（3）收敛　　（4）发散

练习 3.7

1.（1）$\dfrac{8}{3}$　　（2）$\dfrac{16}{3}$

2.（1）$\dfrac{992}{5}\pi$　　（2）$\dfrac{4}{3}\pi r^3$　　（3）$\dfrac{\pi}{2}$

3. 2.5（J）

4. 1.764×10^5（N）

5.（1）20.4（℃）　　（2）15.6（℃）

第 4 章

练习 4.1

1. 点 A 在第四卦限，点 B 在第五卦限，点 C 在第七卦限

2. xOy 面上点的竖坐标为 0，yOz 面上点的横坐标为 0，xOz 面上点的纵坐标为 0

3. x 轴上点的纵、竖坐标都为 0，y 轴上点的横、竖坐标都为 0，z 轴上点的横、纵坐标都为 0

4.（1）$\sqrt{29}$　　（2）2

5. 点 A 到 xOy 面，yOz 面，xOz 面的距离分别为 2，1，3

练习 4.2

1.（1）$\{1,\ \sqrt{2},\ -1\}$，$\{-2,\ 2\sqrt{2},\ 2\}$　　（2）2；$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{-1}{2}$；$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{2\pi}{3}$

2. $\{-4,\ 3,\ -1\}$

3.（1）$\{9,\ 4,\ -7\}$　　（2）$\{3,\ -8,\ -1\}$　　（3）3　　（4）$\{5,\ 1,\ 7\}$　　（5）$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

4. $\left\{\dfrac{3}{\sqrt{11}},\ \dfrac{1}{\sqrt{11}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{11}}\right\}$或$\left\{-\dfrac{3}{\sqrt{11}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{11}},\ \dfrac{1}{\sqrt{11}}\right\}$

练习 4.3

1.（1）$2xy-3z-4=0$　　（2）$2x-6y-z+5=0$

（3）$6x+3y+2z-6=0$

2.（1）过原点的平面其方程中的 $D=0$，即平面方程为 $Ax+By+Cz=0$

（2）平行于 x 轴的平面其方程中的 $A=0$，即平面方程为 $By+Cz+D=0$

（3）平行于 xOy 面的平面其方程中的 $A=0$， $B=0$，即平面方程为 $Cz+D=0$

3． $a=-3$， $b=-5$， $c=1$

4．（1） $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+7}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-4}{-1}$ （2） $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ （3） $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-5}{6}$

练习 4.4

1．表示以 $(1, -4, -2)$ 为球心，$\sqrt{21}$ 为半径的球面

2．（1）椭球面 （2）圆柱面 （3）抛物柱面

（4）双曲柱面 （5）椭圆柱面

3． $x^2+y^2+z^2=16$

4． $y^2+z^2=12x$

5．（1）椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 绕 z 轴旋转一周形成的

（2）双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 或 $z^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周形成的

6．（1）圆 （2）两条平行于 z 轴的直线

第 5 章

练习 5.1

1． $\varphi(0, 1)=1$， $\varphi(-1, -1)=1$， $\varphi(2, 3)=\dfrac{1}{5}$

2．（1） $x-y\neq 0$，图略 （2） $x+y>0$，图略

（3） $xy\geqslant 0$，图略 （4） $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，图略

3．不存在

4．（1）在原点 $(0, 0)$ 间断 （2）在抛物线 $y^2=2x$ 间断

5．连续区域为 $x-y\neq 0$， $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y)=-3$

6．连续区域为 $x^2+y^2>1$， $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} f(x, y)=\dfrac{1}{2}$

7．（1）2 （2） $\dfrac{1}{4}$

练习 5.2

1．（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{xy}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^{xy}$ （2） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$

（3） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

（4）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$

2．$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{2}{5}$

3．$\dfrac{1}{2}$

4．（1）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x}{y^2}$

（2）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2y^{-3}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6xy^{-4}$

5．0，6，0

6．（1）$\mathrm{d}z=yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$

（2）$\mathrm{d}z=[\sin(x^2+y^2)+2x^2\cos(x^2+y^2)]\mathrm{d}x+2xy\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

7．$\triangle z=-0.204\,04$，$\mathrm{d}z=-0.20$

8．（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y\cos y(\cos y-\sin y)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\sin^2 y(x\sin y-2x\cos y)+x^2\cos^2 y(x\cos y-2x\sin y)$

（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2(x-y)(x^3+y^2)^{x-y-1}+(x^3+y^2)^{x-y}\ln(x^3+y^2)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y(x-y)(x^3+y^2)^{x-y-1}-(x^3+y^2)^{x-y}\ln(x^3+y^2)$

（3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y\cos x+2\mathrm{e}^{2x+2y}}{\mathrm{e}^{2x+2y}+y\sin x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\sin x+2\mathrm{e}^{2x+2y}}{\mathrm{e}^{2x+2y}+y\sin x}$

9．$\mathrm{e}^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$

10．$a^{\ln x}(1+\ln a)$

练习 5.3

当长、宽、高各为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$m 时，水箱容积最大

练习 5.4

1．$\dfrac{2}{3}\pi a^3$

2．4

3．（1）$\dfrac{44}{5}$　（2）$\dfrac{16}{105}$　（3）$\dfrac{9}{16}$

4．（1）$\pi(\mathrm{e}^9-1)$　（2）$2\pi\ln\dfrac{3}{2}$

5．$\dfrac{7}{2}$

6. $(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4a}{3\pi})$

7. $\frac{1}{2}\pi a^4$

第6章

练习6.1

1.（1）一阶 （2）二阶 （3）三阶 （4）二阶

2. $y=e^x$

3. $y=\sqrt{2}\sin x$

练习6.2

1.（1）$y=x^2+5\cos x+e^x+C$ （2）$y=(x-1)e^x+C$

（3）$y=\ln|x|+C$ （4）$y=\sin x+1$

2.（1）$y=e^{cx}$ （2）$y-x-\frac{x^2+y^2}{2}=C$

（3）$4+y^2=2(1+x)$ （4）$y=2x$

3.（1）$y=C(x+1)^2$ （2）$y=Ce^{\cos x}$

（3）$y=(x+C)e^{-x}$ （4）$y=2x-1+Ce^{-2x}$

（5）$y=(\frac{x^2}{2}+1)e^{-x^2}$ （6）$y=2(x-1)e^{2x}+3e^x$

练习6.3

1.（1）$y=C_1e^{-6x}+C_2e^x$ （2）$y=(C_1+C_2x)e^{3x}$

（3）$y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ （4）$y=2e^{3x}+4e^x$

（5）$y=(4+7x)e^{-\frac{x}{2}}$ （6）$y=e^{-2x}\sin 5x$

2.（1）$y^*=3x^2+6x$ （2）$y^*=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x$ （3）$y^*=\frac{5}{2}e^{3x}$

（4）$y^*=\frac{1}{3}xe^{-5x}$ （5）$y^*=\frac{1}{4}x\sin 2x$

3.（1）$y^*=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx$ （2）$y^*=(Ax+B)e^{3x}$

（3）$y^*=(Ax^3+Bx^2)e^{-5x}$ （4）$y^*=x(A\cos 4x+B\sin 4x)$

4.（1）$y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{4}(x+1)$ （2）$y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$

（3）$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{x}{2}\cos x$

第7章

练习 7.1

1.（1）收敛　（2）发散　（3）发散　（4）收敛
2.（1）收敛　（2）发散　（3）收敛　（4）发散
3.（1）收敛　（2）发散　（3）发散

练习 7.2

1.（1）$R=1$　（−1，1）　（2）$R=+\infty$　（$-\infty$，$+\infty$）
（3）$R=1$　（−1，1）　（4）$R=+\infty$　（$-\infty$，$+\infty$）
（5）$R=2$　（−2，2）　（6）$R=1$　（−2，0）

2.（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$　（−2，2）　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!2^{2n-1}}$　（$-\infty$，$+\infty$）
（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$　（$-\infty$，$+\infty$）　（4）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$　（−1，1）
（5）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$　（−1，1）　（6）$-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}$　（$-a<x<a$）

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$　（0，2）

4. $\mathrm{e}^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$　（$-\infty$，$+\infty$）

练习 7.3

1. $-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots)+(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots)$

2. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots)$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$　（0，π］

4. $\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots)$

第8章

练习 8.1

1. $a_{23}=5$，$a_{31}=3$
2. $a=3$，$b=4$

练习 8.2

1.（1）$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ （3）$\begin{pmatrix} 18 & 2 & 11 \\ 15 & -7 & 8 \end{pmatrix}$

2.（1）$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 2 & -16 \end{pmatrix}$

练习 8.3

1.（1）是 （2）不是 （3）不是 （4）是

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.（1）2 （2）2 （3）3

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

练习 8.4

1.（1）$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ （3）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\dfrac{3}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

2.（1）$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ （2）$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -14 & 9 \end{pmatrix}$

练习 8.5

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 7 & -4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{AB})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{AB})=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

练习 8.6

1.（1）$\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$　C_1，C_2为任意常数　（2）$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4\\-9\\4\\3\end{pmatrix}$

2.（1）$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}7\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}10\\-7\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\0\end{pmatrix}$　C_1，C_2为任意常数

3．$\lambda=2$ 或 $\lambda=-3$

第 9 章

练习 9.1

（1）$\dfrac{1}{s+2}$　（2）$\dfrac{1}{s}(2\mathrm{e}^{-4s}-1)$　（3）$\dfrac{1}{s}(\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-4s})$

练习 9.2

（1）$\dfrac{2}{s^3}-\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{3}{s}$　（2）$\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{(s-1)^2}$　（3）$\dfrac{10}{s^2+4}+\dfrac{4s}{s^2+9}$　（4）$\dfrac{3}{(s+2)^2+9}$

练习 9.3

（1）$2\mathrm{e}^{3t}$　（2）$4\cos 4t$　（3）$\dfrac{1}{6}\sin\dfrac{3}{2}t$　（4）$2\cos 6t-\dfrac{4}{3}\sin 6t$

（5）$\dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-5t}-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}$　（6）$\dfrac{4}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-2t}\sin\sqrt{6}t$

练习 9.4

1.（1）$i(t)=5(\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-5t})$　（2）$y(t)=\sin\omega t$　（3）$x(t)=\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t+3\sin 2t)$

2.（1）$\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\\y=\mathrm{e}^t\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t}\sin t\\y=\mathrm{e}^{-t}\cos t\end{cases}$

参 考 文 献

［1］ 同济大学应用数学系. 高等数学. 北京：高等教育出版社，2002.
［2］ 李心灿. 高等数学. 北京：中国人民大学出版社. 1999.
［3］ 同济大学应用数学系. 工程数学，线性代数. 北京：高等教育出版社，1999.
［4］ 南京工学院数学教研室. 积分变换. 北京：高等教育出版社，1992.
［5］ 唐瑞娜，白淑岩. 高等数学（工科类）. 北京：清华大学出版社，北京交通大学出版社，2004.
［6］ 庄万. 常微分方程习题集. 济南：山东科学技术出版社，2003.
［7］ 武群. 大学数学. 北京：中国水利水电出版社，2005.
［8］ 刘书田. 线性代数. 北京：北京大学出版社，2004.
［9］ 贺洪江，王振涛. 电路基础. 北京：高等教育出版社，2004.
［10］宣立新. 高等数学. 北京：高等教育出版社，1999.
［11］刘贵濂. 高等数学. 北京：机械工业出版社，2003.
［12］王代久. 高等数学. 北京：机械工业出版社，2003.
［13］滕桂兰，杨万禄. 高等数学. 天津：天津大学出版社，1996.
［14］李广全. 高等数学. 天津：天津大学出版社，2004.
［15］李文林. 数学史概论. 北京：高等教育出版社，2003.
［16］斯科特，数学史. 侯德润，张兰译. 桂林：广西师范大学出版社，2002.
［17］L・戈丁. 数学理论. 胡作玄译. 北京：科学出版社，2002.
［18］王树禾. 数学思想史. 北京：国防工业出版社，2003.
［19］Ａ．Д．亚历山大洛夫等著. 数学——它的内容、方法和意义. 孙小礼等译. 北京：科学出版社，1988.

反侵权盗版声明

举报电话：（010）88254396；（010）88258888

传　　真：（010）88254397

E-mail：　dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

电子工业出版社总编办公室

邮　　编：100036